

DOI: 10.19783/j.cnki.pspc.251069

基于多速率采样数据的微电网二次频率控制

于永进¹, 张家浚¹, 刘琪¹, 王福晶²

(1. 山东科技大学电气与自动化工程学院, 山东 青岛 266590; 2. 华能山东发电有限公司, 山东 济南 250014)

摘要: 二次频率控制是保障孤岛微电网频率稳定的关键。针对子区域采样速率不同可能导致的控制效果不佳问题, 基于多速率采样数据对相应的控制方案进行了研究。相较于现有方案, 在构造系统数学模型时进一步考虑了多速率的采样场景。一方面, 这将有利于提高控制方案的普适性和实际应用价值。另一方面, 通过在通信资源充足的子区域缩短采样间隔, 通信资源相对紧张的子区域的采样间隔可以更大, 从而避免传输过程中的数据拥塞。在稳定性分析与反馈增益求解过程中, 引入循环泛函法以放宽对李雅普诺夫泛函的正定性要求, 改善了结果的保守性。最后, 通过仿真算例验证了所提方案的有效性。

关键词: 微电网; 二次频率控制; 多速率采样数据; 循环泛函法

Secondary frequency control of microgrids based on multi-rate sampling data

YU Yongjin¹, ZHANG Jiajun¹, LIU Qi¹, WANG Fujing²

(1. College of Electrical Engineering and Automation, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China;

2. Huaneng Shandong Power Generation Co., Ltd., Jinan 250014, China)

Abstract: Secondary frequency control is crucial for ensuring frequency stability in islanded microgrids. To address potential control inefficiencies arising from different sampling rates across microgrid subareas, this paper investigates corresponding control scheme based on multi-rate sampling data. Compared to existing schemes, the proposed method explicitly considers multi-rate sampling scenarios when constructing the system mathematical model. On the one hand, this enhances the generality and practical applicability of the control scheme. On the other hand, by shortening the sampling intervals in subareas with sufficient communication resources, larger sampling intervals can be adopted in subareas with relatively constrained communication resources, thereby avoiding data congestion during transmission. In stability analysis and feedback gain design, this paper introduces the looped-functional approach to relax the positive definiteness requirement of the Lyapunov functional, thereby reducing the conservatism of the results. Finally, simulation studies are conducted to verify the effectiveness of the proposed scheme.

This work is supported by the Young Scientists Fund of National Natural Science Foundation of China (No. 52307115).

Key words: microgrid; secondary frequency control; multi-rate sampling data; looped-functional approach

0 引言

微电网通常由分布式发电单元(distributed generation, DG)、本地负荷、储能系统(energy storage systems, ESS)以及通信和控制设备等构成, 它是为农村和偏远地区供电的一种有效解决方案^[1-3]。根据能否获得主电网的支持, 微电网有并网与孤岛两种运行模式。随着配电网被允许孤岛运行, 孤岛微电

网也有望成为智能主动配电网的重要组成部分^[4]。与传统电力系统相比, 微电网规模更小, 其包含的高比例可再生能源增加了系统的不确定性。同时, 由于电力电子逆变器的使用会导致电源与负荷解耦, 微电网的系统惯量显著降低^[5-6]。当运行在孤岛模式下时, 微电网将失去来自公共主电网的支持, 需要依靠自身来维持频率的稳定, 此时, 负载等的微小变化都可能在短时间内导致较大的频率波动^[7]。由于下垂特性的影响, 一次频率控制会导致微电网的稳态频率产生偏差^[8-9], 因此必须采用二次频率控制来使其频率保持在额定值附近。

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金项目资助(52307115); 山东省自然科学基金项目资助(ZR2022ME219)

现有的文献中, 集中式的控制结构被广泛地应用于微电网的频率控制^[10-11]。这种控制结构需要配置一个中央控制器以处理来自整个系统的采样数据并提供相应的反馈, 因此中央控制器的计算负担相当沉重, 数据传输过程所需要的时间可能会较长, 部分通信链路或是控制器的故障会对整个系统的稳定运行造成不利影响^[12-13]。与集中式控制相比, 分布式控制无需配置中央控制器来处理全系统数据, 各个子区域的控制器只需处理本地及相邻子区域的采样数据, 再通过彼此之间的协同工作即可将整个微电网的频率维持在允许范围内^[14-15]。显然, 对于包含多个子区域的微电网系统, 分布式控制能够缩短数据传输距离并提高运行稳定性。此外, 分布式控制在灵活性和可扩展性上也更有优势^[16-17]。无论采用集中式还是分布式结构, 微电网的二次频率控制都依赖于采样与通信技术。针对这些领域的研究已取得诸多成果, 例如, 文献[18]基于异步采样数据研究了领导者-跟随者一致性问题, 并为固定网络和切换有向网络下的通用线性多智能体系统设计了分布式状态反馈控制器。文献[19]设计了基于动态事件触发机制的微电网二次频率控制方法, 该方法能够根据上一次传输值与当前采样值之间的误差来对传输阈值进行动态调整。文献[20]为通信受限的电力系统提出了一种具有记忆功能的事件触发式 H 无穷负载频率控制方案, 该方案能够利用最新传输的一系列数据, 显著提升控制性能。需要注意的是, 当涉及到多区域的采样数据系统时, 以上相关文献都假定不同子区域的采样速率是相同的。实际上, 多区域微电网中传感器的测量数据通常是以不同的采样率获取的, 因此在建立模型时考虑多速率的采样场景更具现实意义。此外, 允许各子区域以不同速率进行采样能够缓解局部通信资源紧张, 避免传输过程中的数据拥塞。

在二次频率控制回路中, 连续状态参数被采样并通过数字信道进行传输, 然后数字控制器基于这些采样数据生成控制输入。这意味着微电网系统的二次频率控制同时包含连续时间部分和离散时间部分。针对这一问题, 文献[21]提出了循环泛函法, 通过该方法, 能够基于连续时间模型, 运用离散时间 Lyapunov 理论对线性采样数据系统的稳定性进行分析。在 Lyapunov 泛函的构建过程中, 循环泛函部分可不受正定性条件的约束, 因此相较于传统的 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 所得到结果的保守性能能够降低。循环泛函法已在诸多文献中得到应用, 例如, 文献[22]提出了一种满足典型 Bessel-Legendre 不等式的新型循环泛函, 并以此为基础对闭环系统

提出了若干与其阶数相关的稳定性判据。针对采样数据及信号传输延迟问题, 文献[23]通过构造相应的循环泛函推导出了系统负荷频率控制的稳定条件。文献[24]则根据单调性将延迟区间划分为两部分, 分别提出了与单调递增和单调递减区间相关的两种循环泛函, 并在此基础上得出了保守性较弱的稳定性判据。但需要注意的是, 上述研究成果中的循环泛函仅适用于单一采样速率的场景。对于多速率采样数据系统, 各子区域的采样不同步, 这就给系统循环泛函的构建带来了问题。另外, 虽然已有许多求解反馈增益的方法, 但这些方法在应用到具体场景中时往往会存在局限性, 例如, 文献[25]中的方法要求矩阵 C 可逆, 但微电网系统往往并不满足这一条件; 文献[26]中的方法则没有考虑自由加权矩阵的影响。因此有必要在本文所考虑的场景下对如何求解反馈增益进行研究。

本文旨在基于多速率采样数据为微电网系统设计二次频率控制方案, 主要贡献如下。

1) 通过循环泛函法, 提出了基于多速率采样数据的二次频率控制稳定性准则。因其在采样时刻的值保持不变, 循环泛函可放宽所构造的李雅普诺夫泛函的正定性要求, 降低结果的保守性。相较于文献[18-20]中单一速率的情况, 多速率采样更具现实意义, 并为根据通信负担调整各个子区域的采样间隔提供了可能。

2) 给出了多速率采样相关概念的数学描述, 并将其融入到微电网的采样环节, 最终构建了基于多速率采样数据的微电网动态频率响应模型。该模型可灵活扩展, 根据需要添加 ESS 等模块。

3) 通过调整稳定性准则中的自由加权矩阵并将原问题转化为 W-problem, 推导出了多速率采样场景下微电网系统反馈增益矩阵的求解方法。该方法无需满足相关矩阵非奇异性的要求并充分考虑了自由加权矩阵的影响。

1 预备知识

1.1 符号说明

在本文中, 符号 N^+ 、 R^+ 、 R^n 、 $R^{m \times n}$ 、 E 分别表示正整数集、非负实数集、 n 维实向量集、维数为 $m \times n$ 的实矩阵集以及从区间 $[0, H]$ 到 R^n 的可微函数集, 其中 $H \in R^+$; $P > 0$ 表示矩阵 $P \in R^{m \times m}$ 是正定对称矩阵; $M = (M_{ij})_{2 \times 4}$ 表示矩阵 M 是由 2×4 个子块 M_{ij} 组成的分块矩阵; I 表示单位矩阵, 其维数由具体情况决定; $*$ 表示对称矩阵中的对称项; 对于平方可积的信号向量 f , $\|f(t)\| = \sqrt{f(t)^T f(t)}$

和 $\|f\|_2 = (\int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt)^{1/2}$ 分别表示向量的欧氏范数和 2 范数。

1.2 多速率采样下微电网的动态模型

根据地理位置等因素，微电网系统可以划分为若干子区域，相邻子区域之间通过联络线实现互联。为实现分布式的二次频率控制，对各个子区域的区域控制误差(area control error, ACE)进行采样并作为控制信号，该信号能够反映本地及其与其他子区域的频率偏差。控制信号传输到各子区域的控制器后，经过计算生成控制输入对系统的状态进行调控，使微电网的频率恢复到额定值。图 1 展示了多速率采样下微电网系统中第 i 个子区域的动态频率响应特性。图中： M_i 、 D_i 、 $T_{t,i}$ 、 $T_{g,i}$ 和 R_i 分别表示发电机的等效惯性常数、发电机的等效阻尼系数、汽轮机的时间常数、调速器的时间常数以及第 i 个子区域的下垂特性系数； T_{ij} 为子区域 i 和 j 的连接线同步系数，如果子区域 i 和 j 邻接，则 $T_{ij} > 0$ ，否则 $T_{ij} = 0$ ； $\tilde{y}_i(t)$ 表示 ACE 信号， $\tilde{y}_i(t) = \beta_i \Delta f_i(t) + \Delta P_{tie,i}(t)$ ，其中 β_i 是频率偏差因数， Δf_i 、 $\Delta P_{tie,i}$ 、 $\Delta P_{g,i}(t)$ 、 $\Delta P_{d,i}$ 、 $\Delta P_{g,i}$ 和 $u_i(t)$ 分别表示第 i 个子区域的频率偏差、汽轮机功率输出偏差、联络线功率交换、负荷扰动、调速器阀门位置偏差以及控制输入。

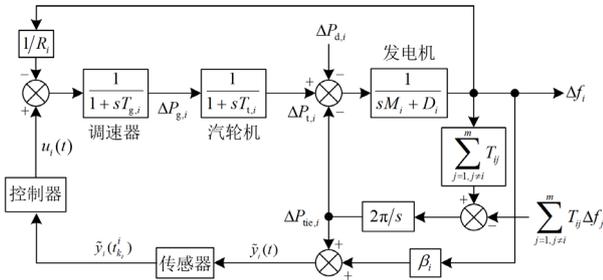


图 1 微电网中第 i 个子区域的动态频率响应

Fig. 1 Dynamic frequency response of the i th subarea in a microgrid

根据图 1，微电网系统第 i 个子区域的动态频率响应可描述为

$$\begin{cases} \dot{\Delta f}_i(t) = \frac{1}{M_i} (\Delta P_{t,i}(t) - D_i \Delta f_i(t) - \Delta P_{tie,i}(t) - \Delta P_{d,i}(t)) \\ \dot{\Delta P}_{t,i}(t) = \frac{1}{T_{t,i}} (\Delta P_{g,i}(t) - \Delta P_{t,i}(t)) \\ \dot{\Delta P}_{g,i}(t) = \frac{1}{T_{g,i}} \left(u_i(t) - \Delta P_{g,i}(t) - \frac{1}{R_i} \Delta f_i(t) \right) \\ \Delta P_{tie,i}(t) = 2\pi \sum_{j=1, j \neq i}^m T_{ij} (\Delta f_i(t) - \Delta f_j(t)) \end{cases} \quad (1)$$

定义

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_i(t) = [\Delta f_i(t), \Delta P_{tie,i}(t), \Delta P_{t,i}(t), \Delta P_{g,i}(t)]^T \\ \omega_i(t) = \Delta P_{d,i}(t) \end{cases} \quad (2)$$

则系统(1)可以写为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i(t) = \tilde{\mathbf{A}}_i \tilde{\mathbf{x}}_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^m \tilde{\mathbf{A}}_{ij} \tilde{\mathbf{x}}_j(t) + \tilde{\mathbf{B}}_i u_i(t) + \tilde{\mathbf{F}}_i \omega_i(t) \\ \tilde{\mathbf{y}}_i(t) = \tilde{\mathbf{C}}_i \tilde{\mathbf{x}}_i(t) \end{cases} \quad (3)$$

其中：

$$\tilde{\mathbf{A}}_{ii} = \begin{bmatrix} -\frac{D_i}{M_i} & -\frac{1}{M_i} & \frac{1}{M_i} & 0 \\ 2\pi \sum_{j=1, j \neq i}^m T_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_{t,i}} & \frac{1}{T_{t,i}} \\ -\frac{1}{R_i T_{g,i}} & 0 & 0 & -\frac{1}{T_{g,i}} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\pi T_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_{g,i}} \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{F}}_i = \begin{bmatrix} -\frac{1}{M_i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_i = [\beta_i \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

采用 PI 控制器并对 $\tilde{y}_i(t)$ 进行采样作为控制信号， $u_i(t)$ 的表达式为

$$u_i(t) = -K_{P,i} \tilde{y}_i(t) - K_{I,i} \int \tilde{y}_i(t) \quad (4)$$

式中： $K_{P,i}$ 和 $K_{I,i}$ 分别为控制器的比例和积分系数。

由于不同子区域的采样速率在实际当中往往不完全一致，且各个子区域的采样通常是非周期性的，若基于同步采样生成控制输入，会造成模型与实际情况之间的差异，导致基于这些模型的控制策略无法实现良好的控制效果。多速率、非周期性的采样数据不具备同步采样数据的规整性，因而描述起来更为复杂。为分析多速率、非周期性的采样行为，将相关概念定义如下。

首先，假设第 i 个子区域的状态向量在 t_k^i 时刻被采样，其中 $k_i \in N^+$ 表示第 i 个子区域的采样序号， t_k^i 表示第 i 个子区域中不晚于 t_k 的最后一次采样的时刻。那么，该子区域两次连续采样之间的时间间隔定义为

$$h_{k_i}^i = t_{k_i+1}^i - t_{k_i}^i \in (0, \bar{h}^i] \quad (5)$$

式中： \bar{h}^i 表示第 i 个子区域采样间隔的上界。

对于每一个子区域, 其采样时刻都可以构成一个集合, 而这些集合的并集则构成了整个微电网系统的采样时刻, 其中的元素用 t_k 来表示, 具体表达式为

$$\begin{cases} t_1 = \min\{t_1^1, t_1^2, \dots, t_1^m\} \\ t_{k+1} = t_k + \min\{t_{k+1}^1 - t_k, t_{k+1}^2 - t_k, \dots, t_{k+1}^m - t_k\} \end{cases} \quad (6)$$

式中: $m \in N^+$ 表示微电网所包含的子区域数; $k \in N^+$ 表示整个微电网的采样序号。

类似地, 整个微电网尺度下两次连续采样之间的时间间隔定义为

$$h_k = t_{k+1} - t_k \in (0, \underline{h}] \quad (7)$$

式中: $\underline{h} = \min\{\bar{h}^i\}$ 。即整个微电网系统的采样时刻, 可以认为是由 \bar{h}^i 最小的那个子区域的采样时刻插入其他子区域的采样点后得到的, 因此 h_k 的上界即为 \underline{h} 。

文中的微电网属于采样数据系统, 采用输入延迟方法来将其描述为带有输入延迟的连续模型。对于第 i 个子区域, 输入延迟定义为 $\tau^i(t) = t - t_{k_i}^i$, 其中 $t \in [t_{k_i}^i, t_{k_i+1}^i)$ 。它满足关系式(8)。

$$0 \leq \tau^i(t) \leq h_{k_i}^i \leq \bar{h}^i \leq \bar{h} \quad (8)$$

式中: $\bar{h} = \max\{\bar{h}^i\}$ 。当拓展至整个微电网系统时, 输入延迟 $\tau(t)$ 则由式(9)定义。

$$\tau(t) = t - t_k \leq \tau^i(t) \quad (9)$$

式中: $t \in [t_k, t_{k+1})$ 。

在上述定义的基础上, 考虑微电网系统中多速率、非周期采样的情况, 对于 $t \in [t_k, t_{k+1})$, 控制输入的表达式为

$$\begin{aligned} u_i(t) = & -K_{P,i} \tilde{y}_i(t_k^i) - K_{I,i} \int \tilde{y}_i(t_k^i) = \\ & -K_{P,i} \tilde{y}_i(t - \tau^i(t)) - K_{I,i} \int \tilde{y}_i(t - \tau^i(t)) \end{aligned} \quad (10)$$

将式(10)代入式(3)并定义

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i(t) = [\tilde{\mathbf{x}}_i(t), \int \tilde{\mathbf{y}}_i(t)]^T, \mathbf{y}_i(t) = [\tilde{\mathbf{y}}_i(t), \int \tilde{\mathbf{y}}_i(t)]^T \\ \bar{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{x}_i(t - \tau^i(t)) \end{cases} \quad (11)$$

可以得到

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}_{ii} \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i \mathbf{C}_i \bar{\mathbf{x}}_i(t) + \\ \quad \sum_{j=1, j \neq i}^m \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(t) + \mathbf{F}_i \omega_i(t) \\ \mathbf{y}_i(t) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}_i(t), t \in [t_k, t_{k+1}) \end{cases} \quad (12)$$

其中:

$$\mathbf{A}_{ii} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_i & 0 \\ \tilde{\mathbf{C}}_i & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_i \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{K}_i = [-K_{P,i} \quad -K_{I,i}]; \mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

然后, 定义

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1^T(t), \mathbf{x}_2^T(t), \dots, \mathbf{x}_m^T(t)]^T \\ \bar{\mathbf{x}}(t) = [\bar{\mathbf{x}}_1^T(t), \bar{\mathbf{x}}_2^T(t), \dots, \bar{\mathbf{x}}_m^T(t)]^T \\ \boldsymbol{\omega}(t) = [\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_m(t)]^T \\ \mathbf{y}(t) = [\mathbf{y}_1^T(t), \mathbf{y}_2^T(t), \dots, \mathbf{y}_m^T(t)]^T \end{cases} \quad (13)$$

得到基于多速率采样数据的微电网动态频率响应模型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{C} \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{F} \boldsymbol{\omega}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (14)$$

式中: $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}]_{m \times m}$; $\mathbf{B} = \text{diag}\{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_m\}$; $\mathbf{K} = \text{diag}\{\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_m\}$; $\mathbf{C} = \text{diag}\{\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_m\}$; $\mathbf{F} = \text{diag}\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_m\}$ 。

根据文献[27]中所给出的模型, 可再生能源电源例如光伏(photovoltaic panel, PV)和风电(wind turbine generator, WTG); 以及 ESS 例如电池储能(battery energy storage, BES)和飞轮储能(flywheel energy storage, FES), 可以通过向系统向量和矩阵中添加相应元素而很容易地整合进微电网系统式(14)中, 并且后续定理只需稍作修改即可。

1.3 重要引理

引理 1^[28]: 对于在 R^n 的开子集 D 中取值为正的 $f_1, f_2, \dots, f_N: R^m \rightarrow R$, 若

$$\begin{bmatrix} f_i(t) & g_{i,j}(t) \\ g_{i,j}(t) & f_j(t) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (15)$$

则

$$\sum_i \frac{1}{\varepsilon_i} f_i(t) \geq \sum_i f_i(t) + \sum_{i \neq j} g_{i,j}(t) \quad (16)$$

式中: $g_{i,j}: R^m \rightarrow R$, $g_{j,i} \triangleq g_{i,j}$; $\varepsilon_i \in R$ 满足 $\varepsilon_i > 0$ 且 $\sum \varepsilon_i = 1$ 。

引理 2^[21]: 对于标量 $\mu_2 > \mu_1 > 0$ 以及可微泛函 $V_0: R^n \rightarrow R^+$, 若存在标量 $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$ 和 $\lambda > 0$ 使得式(17)条件成立。

$$\alpha_1 |\mathbf{x}(t)|^2 \leq V_0(\mathbf{x}(t)) \leq \alpha_2 |\mathbf{x}(t)|^2, \forall \mathbf{x} \in R^n \quad (17)$$

那么以下两条结论是等价的:

1) 对于 $\forall p \in N$ 和 $T_p \in [\mu_1, \mu_2]$, 泛函 V_0 的变化量严格为负, 即

$$\Delta V_0(p) = V_0(\mathbf{x}(T_p)) - V_0(\mathbf{x}(0)) < 0 \quad (18)$$

2) 存在一个对于 $\forall g \in E$ 和 $T_p \in [\mu_1, \mu_2]$, 满足式(19)条件的可微泛函 $V_i: [0, \mu_2] \times E \rightarrow R$, 使得对于任意的 $(p, T_p, \rho(t)) \in N \times [\mu_1, \mu_2] \times [0, T_p]$ 。

$$V_i(T_p, g(\cdot)) = V_i(0, g(\cdot)) \quad (19)$$

$$\frac{d}{d\rho(t)} [V_0(\mathbf{x}(\rho)) + V_i(\rho(t), \mathbf{x}(\rho))] < 0 \quad (20)$$

引理 2 中的泛函 V_i 即为循环泛函。一般来说, Lyapunov 泛函需要是正定的, 而根据引理 1, 在推导稳定性准则及求解反馈增益时, 所构造的 Lyapunov 泛函可以由正定部分以及不必保证正定的循环泛函部分构成。根据离散时间理论, 循环泛函部分在采样时刻的值需要保持不变, 在此基础上, 它可以由自由加权矩阵而不必是正定矩阵构成, 这将有利于降低稳定性校验以及求解反馈增益时结果的保守性。

2 二次频率控制方案设计

2.1 节对相应的二次频率控制稳定性准则进行了推导。当 PI 控制器的反馈增益在预设的采样间隔上界 \bar{h}^i ($i=1,2,\dots,m$) 以及 H 无穷性能指标 γ 下能够满足定理 1 时, 即可保证整个微电网系统的频率稳定性。同时, 为便于直接获得反馈增益而不必预设后代入验证, 2.2 节中给出了反馈增益的求解方法。

2.1 二次频率控制稳定性准则

定理 1: 对于给定的 \bar{h}^i ($i=1,2,\dots,m$) > 0 , $\gamma > 0$, 若存在 $\mathbf{P} > 0$, $\mathbf{S} > 0$, $\mathbf{Z} > 0$ 以及适当维数的矩阵 \mathbf{X}_1 、 \mathbf{X}_2 、 \mathbf{T} 、 \mathbf{Y}_i ($i=1,2,\dots,12$)、 $\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_{ij})_{2 \times 4}$ 使得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T}^T & \mathbf{Z} \end{bmatrix} > 0 \quad (21)$$

$$\mathbf{\Psi} < 0, \mathbf{\Psi} + \underline{h}\mathbf{\Phi} < 0 \quad (22)$$

式中: $\mathbf{S} = \text{diag}\{\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_m\}$; $\mathbf{Z} = \text{diag}\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_m\}$; $\mathbf{H} = \text{diag}\{(\bar{h}^1)^2 \mathbf{Z}_1, (\bar{h}^2)^2 \mathbf{Z}_2, \dots, (\bar{h}^m)^2 \mathbf{Z}_m\}$; $\mathbf{T} = \text{diag}\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_m\}$; $\mathbf{\Psi} = (\mathbf{\Psi}_{ij})_{7 \times 7}$; $\mathbf{\Phi} = (\mathbf{\Phi}_{ij})_{7 \times 7}$; $\mathbf{\Psi}_{11} = \mathbf{C}^T \mathbf{C} - \mathbf{Q}_{11} - \mathbf{Q}_{11}^T - (\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_1^T)/2 + \mathbf{S} - \mathbf{Z} + \mathbf{Y}_5 \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{Y}_5^T$; $\mathbf{\Psi}_{12} = -\mathbf{Q}_{12} + \mathbf{Q}_{11}^T + \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2 + \mathbf{A}^T \mathbf{Y}_6^T$; $\mathbf{\Psi}_{13} = -\mathbf{Q}_{13} - \mathbf{Q}_{21}^T + \mathbf{Z} - \mathbf{T} + \mathbf{Y}_5 \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{C} + \mathbf{Y}_{11} + \mathbf{A}^T \mathbf{Y}_7^T$; $\mathbf{\Psi}_{14} = -\mathbf{Q}_{14} + \mathbf{Q}_{21}^T + \mathbf{A}^T \mathbf{Y}_8^T - \mathbf{Y}_{11}$; $\mathbf{\Psi}_{15} = \mathbf{P} - \mathbf{Y}_5 + \mathbf{A}^T \mathbf{Y}_9^T$; $\mathbf{\Psi}_{16} = \mathbf{T} + \mathbf{A}^T \mathbf{Y}_{10}^T$; $\mathbf{\Psi}_{17} = \mathbf{Y}_5 \mathbf{F}$; $\mathbf{\Psi}_{22} = \mathbf{Q}_{12} + \mathbf{Q}_{12}^T - (\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_1^T)/2 + \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2^T$; $\mathbf{\Psi}_{23} = \mathbf{Q}_{13} - \mathbf{Q}_{22}^T + \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_6 \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{C}$; $\mathbf{\Psi}_{24} = \mathbf{Q}_{14} - \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Q}_{22}^T$; $\mathbf{\Psi}_{25} = -\mathbf{Y}_6$; $\mathbf{\Psi}_{27} = \mathbf{Y}_6 \mathbf{F}$; $\mathbf{\Psi}_{33} = -\mathbf{Q}_{23} - \mathbf{Q}_{23}^T - 2\mathbf{Z} + \mathbf{T} + \mathbf{T}^T + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_2^T + \mathbf{Y}_7 \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{C} + (\mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{C})^T \mathbf{Y}_7^T$; $\mathbf{\Psi}_{34} = -\mathbf{Q}_{24} - \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Q}_{23}^T + \mathbf{Y}_3^T + (\mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{C})^T \mathbf{Y}_8^T$; $\mathbf{\Psi}_{35} = -\mathbf{Y}_7 + \mathbf{Y}_{12}^T + (\mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{C})^T \mathbf{Y}_9^T$; $\mathbf{\Psi}_{36} = (\mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{C})^T \mathbf{Y}_{10}^T + \mathbf{Y}_4^T - \mathbf{T} + \mathbf{Z}$; $\mathbf{\Psi}_{37} = \mathbf{Y}_7 \mathbf{F}$; $\mathbf{\Psi}_{44} = -\mathbf{Y}_3 - \mathbf{Y}_3^T + \mathbf{Q}_{24} + \mathbf{Q}_{24}^T$; $\mathbf{\Psi}_{45} = -\mathbf{Y}_8 - \mathbf{Y}_{12}^T$; $\mathbf{\Psi}_{46} = -\mathbf{Y}_4^T$; $\mathbf{\Psi}_{47} = \mathbf{Y}_8 \mathbf{F}$;

$\mathbf{\Psi}_{55} = -\mathbf{Y}_9 - \mathbf{Y}_9^T + \mathbf{H}$; $\mathbf{\Psi}_{56} = -\mathbf{Y}_{10}^T$; $\mathbf{\Psi}_{57} = \mathbf{Y}_9 \mathbf{F}$; $\mathbf{\Psi}_{66} = -\mathbf{S} - \mathbf{Z}$; $\mathbf{\Psi}_{67} = \mathbf{Y}_{10} \mathbf{F}$; $\mathbf{\Psi}_{77} = -\gamma^2 \mathbf{I}$; $\mathbf{\Phi}_{15} = \mathbf{Q}_{11} + \mathbf{Q}_{11}^T + (\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_1^T)/2$; $\mathbf{\Phi}_{25} = \mathbf{Q}_{12}^T - \mathbf{Q}_{11} - \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2^T$; $\mathbf{\Phi}_{35} = \mathbf{Q}_{21} + \mathbf{Q}_{13}^T$; $\mathbf{\Phi}_{45} = \mathbf{Q}_{14}^T - \mathbf{Q}_{21}$; $\mathbf{\Psi}$ 和 $\mathbf{\Phi}$ 上三角部分中未说明的部分均为 0。则微电网系统式(14)渐近稳定并具有 H 无穷性能指标上界 γ 。

证明: 构造如式(23)所示的 Lyapunov 泛函。

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^m \int_{t-\bar{h}^i}^t \mathbf{x}_i^T(s) \mathbf{S}_i \mathbf{x}_i(s) ds + \sum_{i=1}^m \bar{h}^i \int_{-\bar{h}^i}^0 \int_{t+u}^t \dot{\mathbf{x}}_i^T(s) \mathbf{Z}_i \dot{\mathbf{x}}_i(s) ds du + (h_k - \tau(t)) [2\mathbf{\zeta}_1^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{\zeta}_2(t) + \mathbf{\zeta}_3^T(t) \mathbf{R} \mathbf{\zeta}_3(t)] \quad (23)$$

式中: $\mathbf{\zeta}_1^T(t) = [\mathbf{x}^T(t) - \mathbf{x}^T(t_k), \bar{\mathbf{x}}^T(t) - \bar{\mathbf{x}}^T(t_k)]$, $\mathbf{\zeta}_2^T(t) = [\mathbf{x}^T(t), \mathbf{x}^T(t_k), \bar{\mathbf{x}}^T(t), \bar{\mathbf{x}}^T(t_k)]$, $\mathbf{\zeta}_3^T(t) = [\mathbf{x}^T(t), \mathbf{x}^T(t_k)]$, $\mathbf{R} = (\mathbf{R}_{ij})_{2 \times 2}$, $\mathbf{R}_{11} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_1^T/2$, $\mathbf{R}_{12} = -\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$, $\mathbf{R}_{21} = \mathbf{R}_{12}^T$, $\mathbf{R}_{22} = -\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2^T + \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_1^T/2$ 。

因为 $\mathbf{P} > 0$, $\mathbf{S} > 0$, $\mathbf{Z} > 0$, 所以 Lyapunov 泛函中的前三项是正定的。泛函中的后两项为循环泛函项, 可以看到, 通过构造作差项以及具有一定特性的矩阵, 它们在 $\tau(t) = h_k$ 时刻和 $\tau(t) = 0$ 时刻(即两次连续采样时刻)的值恒为 0。证明过程较为简单, 此处不再赘述, 其中最后一项参考了文献[29]中泛函的构造形式。这样一来, 矩阵 \mathbf{Q} 以及 \mathbf{R} 中的 \mathbf{X}_1 和 \mathbf{X}_2 就可以是自由加权矩阵, 有利于降低结果的保守性。

泛函中的 $\sum_{i=1}^m \bar{h}^i \int_{-\bar{h}^i}^0 \int_{t+u}^t \dot{\mathbf{x}}_i^T(s) \mathbf{Z}_i \dot{\mathbf{x}}_i(s) ds du$ 沿系统轨迹的导数为

$$\dot{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{H} \dot{\mathbf{x}}(t) - \sum_{i=1}^m \bar{h}^i \int_{t-\bar{h}^i}^t \dot{\mathbf{x}}_i^T(s) \mathbf{Z}_i \dot{\mathbf{x}}_i(s) ds \quad (24)$$

对式(24)中的积分项应用詹森不等式:

$$- \sum_{i=1}^m \bar{h}^i \int_{t-\bar{h}^i}^t \dot{\mathbf{x}}_i^T(s) \mathbf{Z}_i \dot{\mathbf{x}}_i(s) ds \leq - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\tau^i(t)/\bar{h}^i} [\mathbf{x}_i(t) - \bar{\mathbf{x}}_i(t)]^T \mathbf{Z}_i [\mathbf{x}_i(t) - \bar{\mathbf{x}}_i(t)] - \sum_{i=1}^m \frac{1}{1 - \tau^i(t)/\bar{h}^i} [\bar{\mathbf{x}}_i(t) - \hat{\mathbf{x}}_i(t)]^T \mathbf{Z}_i [\bar{\mathbf{x}}_i(t) - \hat{\mathbf{x}}_i(t)] \quad (25)$$

因为式(21)成立, 所以可以根据引理 1 对式(25)进行进一步推导, 如式(26)所示。

$$- \sum_{i=1}^m \bar{h}^i \int_{t-\bar{h}^i}^t \dot{\mathbf{x}}_i^T(s) \mathbf{Z}_i \dot{\mathbf{x}}_i(s) ds \leq - \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t) \\ \bar{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T}^T & \mathbf{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t) \\ \bar{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \quad (26)$$

其中 $\hat{\mathbf{x}}(t) = [\hat{\mathbf{x}}_1(t), \dots, \hat{\mathbf{x}}_m(t)]^T$, $\hat{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{x}_i(t - \bar{h}^i)$ 。

因此 $V(t)$ 沿系统式(14)的轨迹的导数满足式(27)。

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & 2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{S}\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{S}\hat{\mathbf{x}}(t) + \\ & \dot{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}(t) - 2\zeta_1^T(t)\mathbf{Q}\zeta_2(t) - \zeta_3^T(t)\mathbf{R}\zeta_3(t) + \\ & 2(h_k - \tau(t))[\zeta_1^T(t)\mathbf{Q}\zeta_2(t) + \dot{\zeta}_1^T(t)\mathbf{Q}\zeta_2(t)] + \\ & (h_k - \tau(t))[\dot{\mathbf{x}}^T(t)(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_1^T)\mathbf{x}(t) + \\ & 2\dot{\mathbf{x}}^T(t)(-\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)\mathbf{x}(t_k)] - \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t) \\ \bar{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T}^T & \mathbf{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t) \\ \bar{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

系统中的 $\bar{\mathbf{x}}(t)$ 在两次连续采样之间的时间段内保持不变, 因此自由加权矩阵 \mathbf{Y}_i ($i=1,2,\dots,12$) 可以通过式(28)所示的零等式加入到 \dot{V} 中。

$$\begin{cases} 0 = 2[\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Y}_{11} + \mathbf{x}^T(t_k)\mathbf{Y}_1 + \bar{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{Y}_2 + \bar{\mathbf{x}}^T(t_k)\mathbf{Y}_3 + \\ \quad \dot{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{Y}_{12} + \dot{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{Y}_4][\bar{\mathbf{x}}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t_k)] \\ 0 = 2[\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Y}_5 + \mathbf{x}^T(t_k)\mathbf{Y}_6 + \bar{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{Y}_7 + \bar{\mathbf{x}}^T(t_k)\mathbf{Y}_8 + \\ \quad \dot{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{Y}_9 + \dot{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{Y}_{10}][\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}(t) + \\ \quad \mathbf{F}\boldsymbol{\omega}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t)] \end{cases} \quad (28)$$

根据式(27)和式(28), 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \boldsymbol{\chi}^T(t)[\boldsymbol{\Psi} + (h_k - \tau(t))\boldsymbol{\Phi}]\boldsymbol{\chi}(t) - \\ & \mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t) + \gamma^2\boldsymbol{\omega}^T(t)\boldsymbol{\omega}(t) = \\ & \boldsymbol{\chi}^T(t) \left\{ \frac{h_k - \tau(t)}{h_k} \left[\frac{h - h_k}{h} \boldsymbol{\Psi} + \frac{h_k}{h} (\boldsymbol{\Psi} + \underline{h}\boldsymbol{\Phi}) \right] + \frac{\tau(t)}{h_k} \boldsymbol{\Psi} \right\} \cdot \\ & \boldsymbol{\chi}(t) - \mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t) + \gamma^2\boldsymbol{\omega}^T(t)\boldsymbol{\omega}(t) \end{aligned} \quad (29)$$

式中: $\boldsymbol{\chi}(t) = [\mathbf{x}^T(t), \mathbf{x}^T(t_k), \bar{\mathbf{x}}^T(t), \bar{\mathbf{x}}^T(t_k), \dot{\mathbf{x}}^T(t), \dot{\mathbf{x}}^T(t_k), \boldsymbol{\omega}^T(t)]^T$ 。

因此, 若式(21)和式(22)成立, 那么

$$\dot{V}(t) \leq -\mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t) + \gamma^2\boldsymbol{\omega}^T(t)\boldsymbol{\omega}(t) \quad (30)$$

对不等式两侧从 0 到 $t_k \rightarrow \infty$ 进行积分并代入零初始条件, 可以得到

$$\int_0^\infty \mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t)dt < \int_0^\infty \gamma^2\boldsymbol{\omega}^T(t)\boldsymbol{\omega}(t)dt \quad (31)$$

因此, 对于任意非零 $\boldsymbol{\omega}(t) \in L_2[0, +\infty)$, $\|\mathbf{y}(t)\|_2 \leq \gamma\|\boldsymbol{\omega}(t)\|_2$, 即微电网的二次频率控制具有满足期望的 H 无穷性能。而当 $\boldsymbol{\omega}(t) = 0$ 时 $\dot{V}(t) < 0$, 根据引理 1, 这说明微电网系统式(14)是渐近稳定的, 即在二次频率控制的作用下系统频率偏差能够收敛至 0。

2.2 反馈增益的求解方法

在定理 1 中, 反馈增益矩阵 \mathbf{K} 需预先给定并代入矩阵不等式进行验证, 若要直接获得 \mathbf{K} , 就需要解决它与自由加权矩阵的耦合问题。因此, 首先对

式(28)中的 \mathbf{Y}_i ($i=5,6,\dots,10$) 进一步定义: $\mathbf{Y}_i = y_i\mathbf{Y}_0$, 其中 $y_i \in \mathbf{R}$, \mathbf{Y}_0 是自由加权矩阵。然后, 定义 $\mathbf{X} = \mathbf{Y}_0^{-T}$, $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{X}^T\mathbf{P}\mathbf{X}$, $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{X}^T\mathbf{S}\mathbf{X}$, $\tilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{X}^T\mathbf{Z}\mathbf{X}$, $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{X}^T\mathbf{T}\mathbf{X}$, $\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{X}^T\mathbf{H}\mathbf{X}$, $\tilde{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{X}^T\mathbf{X}_1\mathbf{X}$, $\tilde{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{X}^T\mathbf{X}_2\mathbf{X}$ 和 $\tilde{\mathbf{Q}} = (\mathbf{X}^T\tilde{\mathbf{Q}}_i\mathbf{X})_{2 \times 4}$, 并用 $\text{diag}\{\mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{I}\}$ 及其转置分别右乘、左乘式(22)中的矩阵不等式, 可以得到如下等价条件。

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Z}} & \tilde{\mathbf{T}} \\ \tilde{\mathbf{T}}^T & \tilde{\mathbf{Z}} \end{bmatrix} > 0 \quad (32)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Psi}} < 0, \tilde{\boldsymbol{\Psi}} + \underline{h}\tilde{\boldsymbol{\Phi}} < 0 \quad (33)$$

式中: $\tilde{\boldsymbol{\Psi}} = (\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{ij})_{7 \times 7}$; $\tilde{\boldsymbol{\Phi}} = (\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{ij})_{7 \times 7}$; $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{11} = (\mathbf{C}\mathbf{X})^T\mathbf{C}\mathbf{X} + \tilde{\mathbf{Q}}_{11} - \tilde{\mathbf{Q}}_{11}^T + \tilde{\mathbf{S}} - \tilde{\mathbf{Z}} - (\tilde{\mathbf{X}}_1 + \tilde{\mathbf{X}}_1^T)/2 + y_5\mathbf{A}\mathbf{X} + y_5\mathbf{X}^T\mathbf{A}^T$; $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{12} = \tilde{\mathbf{Q}}_{12} + \tilde{\mathbf{Q}}_{11}^T + \tilde{\mathbf{X}}_1 - \tilde{\mathbf{X}}_2 + y_6\mathbf{X}^T\mathbf{A}^T$; $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{13} = -\tilde{\mathbf{Q}}_{13} - \tilde{\mathbf{Q}}_{21}^T + \tilde{\mathbf{Z}} - \tilde{\mathbf{T}} + \tilde{\mathbf{Y}}_{11} + y_5\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{X} + y_7\mathbf{X}^T\mathbf{A}^T$; $\boldsymbol{\Psi}_{14} = -\tilde{\mathbf{Q}}_{14} + \tilde{\mathbf{Q}}_{21}^T + y_8\mathbf{X}^T\mathbf{A}^T - \tilde{\mathbf{Y}}_{11}$; $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{15} = \tilde{\mathbf{P}} - y_5\mathbf{X} + y_9\mathbf{X}^T\mathbf{A}^T$; $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{16} = \tilde{\mathbf{T}} + y_{10}\mathbf{X}^T\mathbf{A}^T$; $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{17} = y_5\mathbf{F}$; $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{22} = \tilde{\mathbf{Q}}_{12} + \tilde{\mathbf{Q}}_{12}^T + (\tilde{\mathbf{X}}_1 + \tilde{\mathbf{X}}_1^T)/2 + \tilde{\mathbf{X}}_2 + \tilde{\mathbf{X}}_2^T$; $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{23} = \tilde{\mathbf{Q}}_{13} - \tilde{\mathbf{Q}}_{22}^T + \tilde{\mathbf{Y}}_1 + y_6\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{X}$; $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{24} = \tilde{\mathbf{Q}}_{14} + \tilde{\mathbf{Q}}_{22}^T - \tilde{\mathbf{Y}}_1$; $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{25} = -y_6\mathbf{X}$; $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{27} = y_6\mathbf{F}$; $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{33} = -2\tilde{\mathbf{Z}} - \tilde{\mathbf{Q}}_{23} - \tilde{\mathbf{Q}}_{23}^T + \tilde{\mathbf{T}} + \tilde{\mathbf{T}}^T + y_7\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{X} + y_7(\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{X})^T + \tilde{\mathbf{Y}}_2 + \tilde{\mathbf{Y}}_2^T$; $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{34} = -\tilde{\mathbf{Q}}_{24} + \tilde{\mathbf{Q}}_{23}^T + y_8(\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{X})^T - \tilde{\mathbf{Y}}_2 + \tilde{\mathbf{Y}}_2^T$; $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{35} = -y_7\mathbf{X} + \tilde{\mathbf{Y}}_{12}^T + y_9(\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{X})^T$; $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{36} = \tilde{\mathbf{Y}}_4^T - \tilde{\mathbf{T}} + y_{10}(\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{X})^T + \tilde{\mathbf{Z}}$; $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{37} = y_7\mathbf{F}$; $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{44} = \tilde{\mathbf{Y}}_3 - \tilde{\mathbf{Y}}_3^T + \tilde{\mathbf{Q}}_{24} + \tilde{\mathbf{Q}}_{24}^T$; $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{45} = -y_8\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{Y}}_{12}^T$; $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{46} = -\tilde{\mathbf{Y}}_4^T$; $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{47} = y_8\mathbf{F}$; $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{55} = -y_9\mathbf{X} - y_9\mathbf{X}^T + \tilde{\mathbf{H}}$; $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{56} = -y_{10}\mathbf{X}^T$; $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{57} = y_9\mathbf{F}$; $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{66} = -\tilde{\mathbf{S}} - \tilde{\mathbf{Z}}$; $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{67} = y_{10}\mathbf{F}$; $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{77} = -\gamma^2\mathbf{I}$; $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{15} = (\tilde{\mathbf{X}}_1 + \tilde{\mathbf{X}}_1^T)/2 + \tilde{\mathbf{Q}}_{11} + \tilde{\mathbf{Q}}_{11}^T$; $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{25} = \tilde{\mathbf{Q}}_{12}^T - \tilde{\mathbf{Q}}_{11} - \tilde{\mathbf{X}}_1 + \tilde{\mathbf{X}}_2^T$; $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{35} = \tilde{\mathbf{Q}}_{21} + \tilde{\mathbf{Q}}_{13}^T$; $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{45} = \tilde{\mathbf{Q}}_{14}^T - \tilde{\mathbf{Q}}_{21}$; $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}$ 上三角部分中未说明的部分均为 0。

对于 $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{11}$ 中 $(\mathbf{C}\mathbf{X})^T\mathbf{C}\mathbf{X}$ 这一非线性项, 可以应用舒尔补定理对其进行分解, 相应地, 式(33)变为

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Psi}} & \boldsymbol{\Omega} \\ \boldsymbol{\Omega}^T & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Psi}} & \boldsymbol{\Omega} \\ \boldsymbol{\Omega}^T & -\mathbf{I} \end{bmatrix} + \underline{h}\tilde{\boldsymbol{\Phi}} < 0 \quad (34)$$

式中: $\boldsymbol{\Omega} = [\mathbf{C}\mathbf{X}, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$, 相较于 $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{11}$, $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{11}$ 中少了 $(\mathbf{C}\mathbf{X})^T\mathbf{C}\mathbf{X}$ 这一项。

在式(32)、式(34)的基础上, 下面将给出反馈增益 \mathbf{K} 的求解式。在所研究的微电网系统中, 矩阵 $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{2m \times 5m}$ 显然不是一个方阵, 所以定义 $\mathbf{Y} = \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{X}$ 然后得到 $\mathbf{K} = \mathbf{Y}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{X}^{-1}$ 的方法是不可行的。根据文献[30]中的方法, 定义 $\mathbf{F}\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{X}$ 以及 $\mathbf{G}\mathbf{C} = \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{X}$ 并对原始项进行替换, 这样一来新的矩阵不等式中将

不再包含耦合项, 求解 K 的问题就可以转化为文献 [31] 中的 W-problem。为保证等式 $FC = CX$ 以及 $GC = KCX$ 能够成立, 矩阵 F 需要满足式(35)。

$$\begin{bmatrix} -\delta I & (FC - CX)^T \\ * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (35)$$

式中: δ 是一个非常小的标量, $\delta > 0$ 。根据矩阵 C 是行满秩的, 可以得出矩阵 F 是满秩的, 因此 F 可逆, 根据 $FC = CX$ 和 $GC = KCX$ 可以得到 $K = GF^{-1}$ 。

根据上述分析即可在满足频率稳定性的基础上获得反馈增益, 相关定理可总结如下。

定理 2: 对于给定的 $\bar{h}^i (i=1,2,\dots,m) > 0, \gamma > 0$, 若存在 $\tilde{P} > 0, \tilde{S} > 0, \tilde{Z} > 0$ 以及适当维数的矩阵 $F, G, \tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{T}, X, \tilde{Q} = (\tilde{Q}_{ij})_{2 \times 4}$ 使得矩阵不等式(32)、式(34)*以及式(35)成立, 其中式(34)*是通过将式(34)中的 CX 和 KCX 分别替换为 FC 和 GC 后得到的, 那么在反馈增益 $K = GF^{-1}$ 的作用下, 微电网系统式(14)渐近稳定并具有 H 无穷性能指标上界 γ 。

3 算例分析

为分别对微电网二次频率控制的稳定性准则和反馈增益求解方法进行分析验证, 本文使用了 MATLAB 中的 LMI 工具箱来对定理中的线性矩阵不等式进行求解, 并参照图 1 在 Simulink 环境中搭建了孤岛微电网测试系统。为便于分析, 设定微电网系统中仅包含 2 个子区域, 详细的参数^[25]如表 1 所示。

表 1 两区域微电网的参数

Table 1 Parameters of the two-area microgrid

参数	$T_i(s)$	$T_g(s)$	R	D	β	$M(s)$
区域 1	0.3	0.1	0.05	1.0	21.0	10
区域 2	0.4	0.17	0.05	1.5	21.5	12

$T_{12} = 0.1986 \text{ p.u./rad}$

3.1 稳定性准则有效性分析

首先, 对单一速率和多速率采样的采样间隔上界指标进行对比。在单一采样速率的情况下, 微电网的两个子区域的采样间隔上界相同, 若给定参数 $K_{P,1} = K_{P,2} = -0.2, K_{I,1} = K_{I,2} = 0.2$ 以及 $\gamma = 15$, 那么当 $\bar{h}^1 = \bar{h}^2 > 2.21 \text{ s}$ 时, 定理 1 中的线性矩阵不等式组将无法成立, 不能保证微电网系统的频率稳定性。而在多速率采样的情况下, 不同子区域的采样间隔上界不必一致, 若 \bar{h}^1 降低至 1.38 s , 则在频率稳定的前提以及相同的反馈增益和 γ 下, \bar{h}^2 可增大至 2.4 s 。这一结果说明, 在多速率采样的场景下, 微

电网子区域的采样间隔可灵活调整: 通过在通信资源充足的子区域缩短采样间隔, 通信资源相对紧张的子区域的采样间隔可以更大, 从而节约带宽、减少数据拥塞, 保证采样数据和反馈信号能够顺利传输, 进而维持系统频率的稳定。

在 3.1 节的仿真分析中, 选取如下一组满足定理 1 的参数: $K_{P,1} = K_{P,2} = -0.2, K_{I,1} = K_{I,2} = 0.2, \bar{h}^1 = 1.38 \text{ s}, \bar{h}^2 = 2.4 \text{ s}, \gamma = 15$, 其中 \bar{h}^1 和 \bar{h}^2 为给定其他参数情况下微电网两个子区域采样间隔的一组临界值。通过处理由 Simulink 中的 Random Number 模块生成的数据并将其输入 Signal Builder 模块, 可获得满足 $\bar{h}^1 = 1.38 \text{ s}$ 和 $\bar{h}^2 = 2.4 \text{ s}$ 的采样序列, 如图 2 所示。

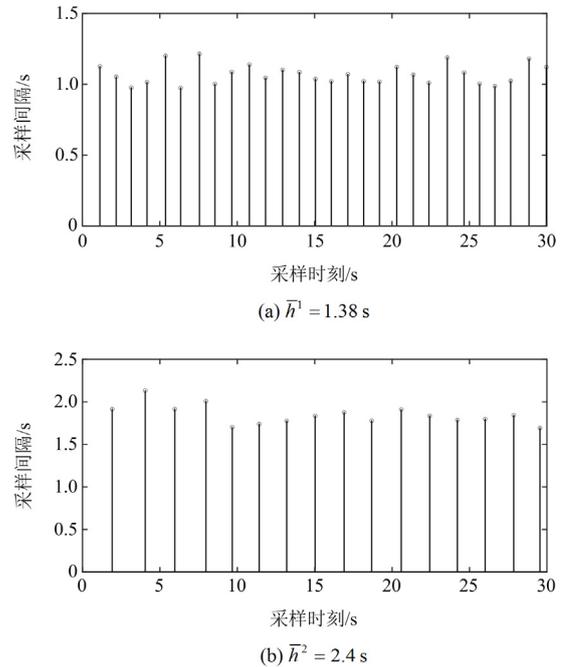


图 2 稳定性分析中的采样时刻和间隔

Fig. 2 Sampling instants and intervals in stability criteria analysis

不同于文献[17-19]中所假定的单一采样速率的情况, 3.1 节中微电网的两个子区域分别以不同速率进行采样。从建立模型的角度来看, 假定各子区域的采样速率相同会使得系统的描述与实际情况之间存在较大差异, 在这种情况下对系统的控制部分进行设计会导致获得的结果偏离预期, 因此, 在模型中考虑采样速率不一致的情况更具现实意义。

为了校验定理 1 的有效性, 分别研究 $\omega(t) = 0$ 和 $\omega(t) \neq 0$ 两种情况下微电网系统的频率响应。在 $\omega(t) = 0$ 的情况下, 假定微电网系统存在初始频率偏差 $\Delta f_1(0) = -0.1$ 和 $\Delta f_2(0) = 0.2$, 这些初始频率偏差可用来表示一次频率控制的不利影响。此时, 系

统的频率响应如图 3(a)所示。而在 $\omega(t) \neq \mathbf{0}$ 的情况下, 对微电网系统施加如下扰动:

$$\omega_1(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 2 \\ 0.05 & 2 \leq t < 20 \\ 0.1 & t \geq 20 \end{cases}$$

$$\omega_2(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 1 \\ 0.05 & 1 \leq t < 23 \\ -0.1 & t \geq 23 \end{cases}$$

系统的频率响应如图 3(b)所示。

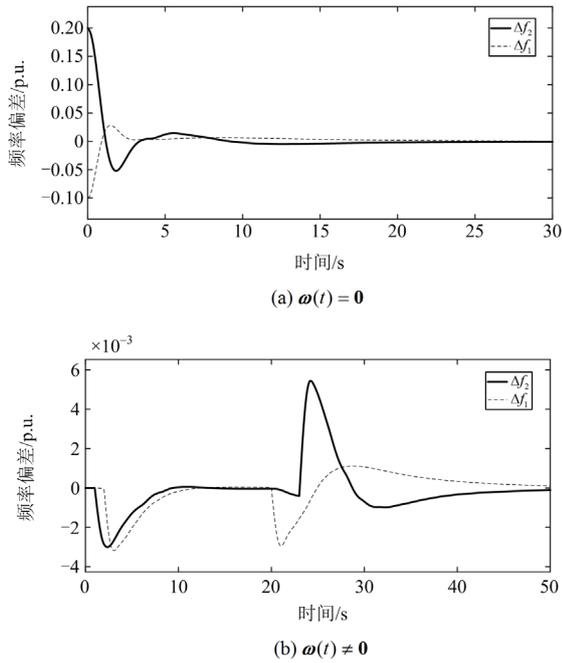


图 3 稳定性分析中微电网两个子区域的频率响应

Fig. 3 Frequency responses of the two subareas in stability criteria analysis

从图 3 可以看出, 在给定的满足定理 1 的参数下, 当 $\omega(t) = \mathbf{0}$ 时, 微电网系统的初始频率偏差能够被很好地消除, 即二次频率控制解决了一次控制的误差问题。而在 $\omega(t) \neq \mathbf{0}$ 的情况下, 外界扰动能够被有效地抑制, 且在扰动后频率可以被拉回到额定值并保持稳定。上述结果验证了稳定性准则和二次频率控制方案的有效性。

3.2 反馈增益求解方法有效性分析

在 3.2 节中, 给定 $\bar{h}^1 = 0.03 \text{ s}$, $\bar{h}^2 = 0.07 \text{ s}$, $\gamma = 15$, $\delta = 0.01$ 以及 $y_i = 1 + (i - 5)/10, i = 5, 6, \dots, 10$, 解线性矩阵不等式(32)、式(34)*和(35)可得如下的反馈增益矩阵 \mathbf{K} 。

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -0.6730 & 0.3018 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3374 & 0.3621 \end{bmatrix}$$

图 4 所示为满足 $\bar{h}^1 = 0.03 \text{ s}$ 和 $\bar{h}^2 = 0.07 \text{ s}$ 的部分采样序列, 以与 3.1 节相同的方式获得。

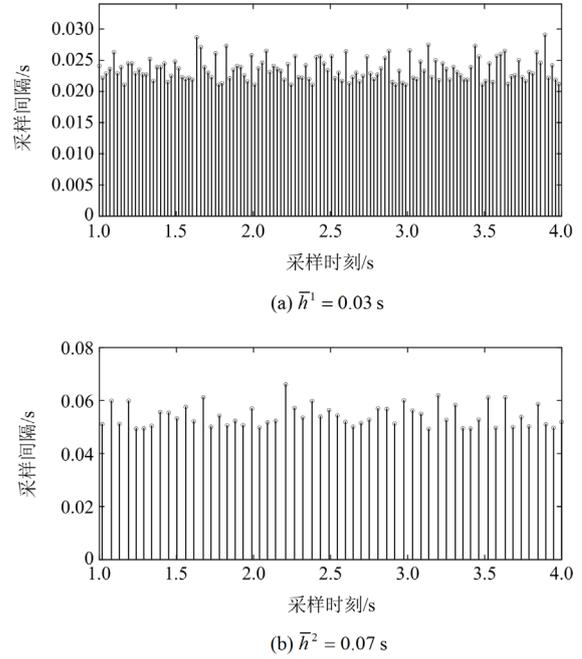
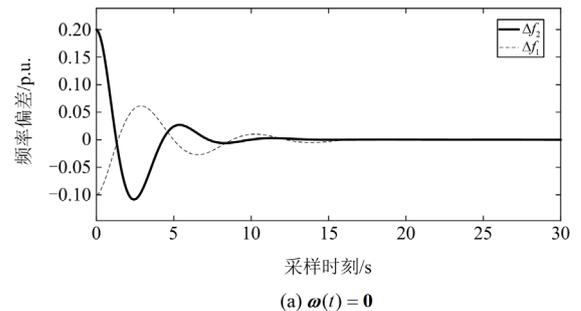


图 4 反馈增益求解中的采样时刻和间隔

Fig. 4 Sampling instants and intervals in determining the feedback gain

为了验证定理 2 的有效性, 在所求得反馈增益的作用下, 同样对 $\omega(t) = \mathbf{0}$ 和 $\omega(t) \neq \mathbf{0}$ 两种情况进行研究。图 5(a)和图 5(b)分别展示了两情况下微电网系统的频率响应曲线。

从图 4 所示的采样序列可以看出, 3.2 节中微电网系统的采样间隔比 3.1 节更小, 这是因为在推导定理 2 时所采取的方法增加了结果的保守性, 例如, 定义 $\mathbf{Y}_i = y_i \mathbf{Y}_0 (i = 5, 6, \dots, 10)$ 实际上降低了矩阵的自由度。从图 5 可以看出, 在所求得反馈增益的作用下, 当 $\omega(t) = \mathbf{0}$ 时, 微电网系统的初始频率偏差同样能够被很好地消除; 而在 $\omega(t) \neq \mathbf{0}$ 的情况下, 外界扰动也能够被有效地抑制, 且在扰动后频率可以被拉回到额定值并保持稳定。上述结果表明, 所求



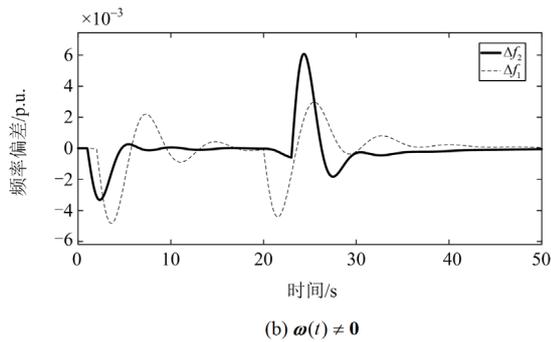


图5 反馈增益求解中微电网两个子区域的频率响应

Fig. 5 Frequency responses of the two subareas in determining the feedback gain

得的反馈增益能够实现有效的二次频率控制，求解方法是有效的。

4 结论

本文提出了一种基于多速率采样数据的二次频率控制方案，该方案不仅更具普适性和实际应用价值，还能让微电网中通信资源相对紧张的子区域以较低的采样速率运行，从而避免数据拥塞现象的发生。通过以数学形式对多速率采样的相关概念进行描述并将其结合到微电网系统中，文中给出了基于多速率采样数据的微电网动态模型。在此模型的基础上，推导了二次频率控制的稳定性准则，使微电网的频率能够维持在允许范围内；而反馈增益的求解方法则使得控制参数可以直接获得而不必代入验证。在上述定理的推导过程中，循环泛函的应用放宽了正定性条件的要求，从而改善了结果的保守性。最后，算例分析表明该方案能够实现有效的二次频率控制，且能够让通信资源相对紧张的子区域运行在较低的采样速率下。需要注意的是，文中尚未讨论通信延迟、数据丢包等通信约束对控制策略的影响，虽然多速率采样能够缓解带宽不足区域的通信压力，但这些问题仍不可忽视。因此，后续将在建立模型时考虑这些因素的影响，在此基础上对多速率采样作进一步研究。

参考文献

- [1] ZHANG Mingyue, HAN Yang, LIU Yuxiang, et al. Multi-timescale modeling and dynamic stability analysis for sustainable microgrids: state-of-the-art and perspectives[J]. Protection and Control of Modern Power Systems, 2024, 9(3): 1-35.
- [2] 宁显华, 潘欢, 李峰, 等. 基于线路电阻观测值的直流微电网改进下垂控制策略研究[J]. 电力系统保护与控制, 2024, 52(11): 42-51.
- [3] SAHOO A K, MAHMUD K, CRITTENDEN M, et al. Communication-less primary and secondary control in inverter-interfaced AC microgrid: an overview[J]. IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics, 2021, 9(5): 5164-5182.
- [4] FARROKHABADI M, CANIZARES C A, SIMPSON-PORCO J W, et al. Microgrid stability definitions, analysis, and examples[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2020, 35(1): 13-29.
- [5] KARIMI A, KHAYAT Y, NADERI M, et al. Inertia response improvement in AC microgrids: a fuzzy-based virtual synchronous generator control[J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2020, 35(4): 4321-4331.
- [6] 邓美玲, 江通财, 白振毅, 等. 计及变流器频率支撑与容量约束的孤岛微电网多源协同调度方法[J]. 山东电力技术, 2025, 52(6): 10-21.
- [7] DENG Meiling, JIANG Tongcai, BAI Zhenyi, et al. Multi-source collaborative scheduling method for islanded microgrids considering converter frequency support and capacity constraints[J]. Shandong Electric Power, 2025, 52(6): 10-21.
- [8] MUHTADI A, PANDIT D, NGUYEN N, et al. Distributed energy resources based microgrid: Review of architecture, control, and reliability[J]. IEEE Transactions on Industry Applications, 2021, 57(3): 2223-2235.
- [9] NING Boda, HAN Qinglong, DING Lei. Distributed finite-time secondary frequency and voltage control for islanded microgrids with communication delays and switching topologies[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, 51(8): 3988-3999.
- [10] NING Boda, HAN Qinglong, ZUO Zongyu, et al. Fixed-time and prescribed-time consensus control of multi-agent systems and its applications: a survey of recent trends and methodologies[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2023, 19(2): 1121-1135.
- [11] QIAN Tong, LIU Yang, ZHANG Wenhao, et al. Event-triggered updating method in centralized and distributed secondary controls for islanded microgrid restoration[J]. IEEE Transactions on Smart Grid, 2020, 11(2): 1387-1395.
- [12] RAFIEE A, BATMANI Y, AHMADI F, et al. Robust load frequency control in islanded microgrids: virtual synchronous generator concept and quantitative feedback theory[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2021, 36(6): 5408-5416.
- [13] 贾浩洋, 李斌, 胡丹丹, 等. 基于事件触发预设时间一致性的孤岛微电网电压二次控制[J]. 电力系统保护与

- 控制, 2025, 53(23): 176-187.
- JIA Haoyang, LI Bin, HU Dandan, et al. Preset-time consensus-based secondary voltage control for islanded microgrids using event-triggered mechanisms[J]. *Power System Protection and Control*, 2025, 53(23): 176-187.
- [13] DING Lei, HAN Qinglong, NING Boda, et al. Distributed resilient finite time secondary control for heterogeneous battery energy storage systems under denial-of-service attacks[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2020, 16(7): 4909-4919.
- [14] 曹晓, 李泽, 崔国增. 孤岛微电网固定时间分布式鲁棒二次控制[J]. *电力系统保护与控制*, 2024, 52(12): 143-153.
- CAO Xiao, LI Ze, CUI Guozeng. Distributed robust fixed-time secondary control of islanded microgrids[J]. *Power System Protection and Control*, 2024, 52(12): 143-153.
- [15] DENG Chao, GUO Fanghong, WEN Changyun, et al. Distributed resilient secondary control for DC microgrids against heterogeneous communication delays and DoS attacks[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2022, 69(11): 11560-11568.
- [16] 张玉芳, 赵婵娟, 程志友, 等. 考虑通信拓扑切换的微电网有限时间分布式二级控制[J]. *电力系统保护与控制*, 2023, 51(8): 149-159.
- ZHANG Yufang, ZHAO Chanjuan, CHENG Zhiyou, et al. Distributed finite-time secondary control of a microgrid with communication topology switching[J]. *Power System Protection and Control*, 2023, 51(8): 149-159.
- [17] HU Jiefeng, SHAN Yinghao, CHENG Kawai, et al. Overview of power converter control in microgrids—challenges, advances, and future trends[J]. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2022, 37(8): 9907-9922.
- [18] LIU Wei, HUANG Jie. Leader-following consensus for linear multi-agent systems via asynchronous sampled-data control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 65(7): 3215-3222.
- [19] 于永进, 孙国强, 樊英杰. 基于动态事件触发机制的孤岛微电网频率控制方法研究[J]. *电力系统保护与控制*, 2024, 52(20): 60-71.
- YU Yongjin, SUN Guoqiang, FAN Yingjie. A frequency control method for an islanded microgrid based on a dynamic event-triggered mechanism[J]. *Power System Protection and Control*, 2024, 52(20): 60-71.
- [20] TIAN Engang, PENG Chen. Memory-based event-triggering H^∞ load frequency control for power systems under deception attacks[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 50(11): 4610-4618.
- [21] SEURET A. A novel stability analysis of linear systems under asynchronous samplings[J]. *Automatica*, 2012, 48(1): 177-182.
- [22] ZHANG Xianming, HAN Qinglong, GE Xiaohua, et al. Resilient control design based on a sampled-data model for a class of networked control systems under denial-of-service attacks[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 50(8): 3616-3626.
- [23] SHANGGUAN Xingchen, ZHANG Chuanke, HE Yong, et al. Robust load frequency control for power system considering transmission delay and sampling period[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2021, 17(8): 5292-5303.
- [24] ZENG Hongbing, HE Yong, TEO K L. Monotone-delay-interval-based Lyapunov functionals for stability analysis of systems with aperiodically varying delay[J]. *Automatica*, 2022, 138.
- [25] PARK J, PARK P. An improved stability criterion for linear systems with multi-rate sampled data[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2020, 38.
- [26] PENG Chen, ZHANG Jin, YAN Huaicheng. Adaptive event-triggering H^∞ load frequency control for network-based power systems[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2018, 65(2): 1685-1694.
- [27] FATHI A, SHAFIEE Q, BEVRANI H. Robust frequency control of microgrids using an extended virtual synchronous generator[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2018, 33(6): 6289-6297.
- [28] PARK P, KO J W, JEONG C. Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays[J]. *Automatica*, 2011, 47(1): 235-238.
- [29] FRIDMAN E. A refined input delay approach to sampled data control[J]. *Automatica*, 2010, 46(2): 421-427.
- [30] PENG Chen, ZHANG Jin. Delay-distribution-dependent load frequency control of power systems with probabilistic interval delays[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2016, 31(4): 3309-3317.
- [31] CRUSIUS C A, TROFINO A. Sufficient LMI conditions for output feedback control problems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(5): 1053-1057.

收稿日期: 2025-09-26; 修回日期: 2026-02-07

作者简介:

于永进(1980—), 男, 博士, 教授, 研究方向为电力系统运行与控制、新能源并网技术; E-mail: yajdjt@163.com

张家浚(2000—), 男, 硕士研究生, 研究方向为微电网二次频率控制; E-mail: emailjiajunz@163.com

刘琪(1992—), 男, 通信作者, 博士, 副教授, 研究方向为配电系统及其自动化、电力系统运行优化与控制、新能源并网。E-mail: qi_liu@sdust.edu.cn

(编辑 周金梅)