

DOI: 10.19783/j.cnki.pspc.250131

考虑相关性的配电网切比雪夫仿射潮流计算方法

廖小兵¹, 魏寒琪¹, 李自成¹, 张一鸣¹, 杨萌², 陈昕芸³

(1. 武汉工程大学电气信息学院, 湖北 武汉 430073; 2. 国网湖北省电力有限公司经济技术研究院, 湖北 武汉 430000; 3. 南昌大学信息工程学院, 江西 南昌 330031)

摘要: 为了解决现有泰勒展开仿射潮流的仿射系数求解问题, 提出了考虑相关性的配电网切比雪夫仿射潮流计算方法。首先利用切比雪夫多项式来构造仿射算子, 在输入区间变量范围内抽取若干个内插值点来求解仿射系数, 以此建立切比雪夫仿射模型。根据切比雪夫仿射模型建立待求变量的仿射形式, 并将待求变量的仿射形式代入到原始潮流方程中, 重构潮流方程, 得到关于待求变量噪声元的仿射优化模型。采用混合盒式-椭球集合描述分布式风电出力的相关性, 通过坐标变换将混合盒式-椭球集合转换为新的仿射约束嵌入仿射优化模型中进行联立求解。通过2个配电网的算例仿真结果表明, 所建立模型与泰勒展开仿射模型相比, 具有更高的计算精度和效率, 并且更适用于较大波动区间下的区间潮流分析场景。同时混合盒式-椭球集合可以很好地反映不同相关性水平对计算结果的影响。

关键词: 配电网; 区间潮流; 切比雪夫多项式; 仿射优化模型; 区间相关性

Chebyshev affine power flow calculation method for distribution networks considering correlation

LIAO Xiaobing¹, WEI Hanqi¹, LI Zicheng¹, ZHANG Yiming¹, YANG Meng², CHEN Xinyun³

(1. College of Electrical and Information Engineering, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430073, China;

2. Economic Research Institute of State Grid Hubei Electric Power Company, Wuhan 430000, China;

3. College of Information Engineering, Nanchang University, Nanchang 330031, China)

Abstract: To address the problem of solving affine coefficients in existing Taylor expansion-based affine power flow methods, a Chebyshev affine power flow calculation method for distribution networks considering correlation is proposed. First, Chebyshev polynomials are used to construct affine operators, and several interpolation points are extracted within the interval ranges of the input variables to solve for the affine coefficients, thereby establishing a Chebyshev affine model. Based on this model, the affine form of the variables to be solved is constructed and substituted into the original power flow equations to reconstruct the equations, obtaining an affine optimization model with respect to the noise elements of the target variables. The correlation of the distributed wind power output is described using the hybrid box-ellipsoid set, and through coordinate transformation, the hybrid box-ellipsoid set is converted into new affine constraints and embedded into the affine optimization model for simultaneous solution. Simulation results on two distribution network examples show that, compared with the Taylor expansion affine model, the proposed model has higher calculation accuracy and efficiency, and is more suitable for interval power flow analysis scenarios under larger fluctuation ranges. Meanwhile, the hybrid box-ellipsoid set effectively reflects the impact of different correlation levels on the calculation results.

This work is supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 52107122).

Key words: distribution network; interval power flow; Chebyshev polynomial; affine optimization model; interval correlation

0 引言

随着碳达峰、碳中和目标的提出, 分布式新能

源在配电网中的占比逐渐提高, 风电、光伏等分布式新能源的大规模接入, 增加了配电网运行的不确定性^[1-3]。传统确定性潮流无法量化不确定性因素对配电网的影响, 难以适应配电网的不确定性变化。不确定性潮流可以有效分析配电网状态量在不确定

基金项目: 国家自然科学基金项目资助(52107122)

性因素影响下的分布特征,成为含不确定性因素配电网分析的重要工具^[4-5]。

目前配电网不确定性潮流算法主要分为3类:模糊潮流(fuzzy power flow, FPF)^[6-7]、概率潮流(probabilistic power flow, PPF)^[8-12]和区间潮流(interval power flow, IPF)^[13-16]。在实际工程运用中,模糊潮流或概率潮流往往难以获取相关不确定性参数的隶属函数或概率密度。而区间潮流只需要输入不确定性变量的上、下边界信息,相对于模糊潮流或概率潮流来说建模简单,数据需求量小,因此在实际工程运用中具有更好的应用价值。

传统区间潮流直接采用区间算术进行计算,存在着明显的缺陷,在计算过程中容易出现区间扩张现象,导致求解结果过于保守^[17]。与传统区间潮流相比,仿射型区间潮流在处理不确定性时具有更高的精度和效率。文献[18]在利用Krawczyk-Moore算子求解区间潮流时,将仿射算法引入到区间乘法中,并在迭代过程中将区间数和对应仿射形式相互转换计算,在一定程度上缓解了区间扩张现象。文献[19]对含区间数的潮流方程进行研究,利用区间泰勒展开将区间迭代过程转化为确定性代数方程进行求解,避免了区间迭代过程,提高了区间潮流求解的精度和效率。文献[20]在基于仿射算法的区间潮流的基础上,进一步提出了混合潮流方程的区间潮流计算方法,将仿射形式代入到潮流方程中,形成关于噪声元的优化模型,进一步抑制区间的扩张现象。文献[21]通过固定仿射噪声元的方式进行仿射近似运算,构建考虑噪声元相关性的节点功率-电压仿射模型,建立了仿射型电网潮流方程。在仿射计算中不会产生新的噪声元,因此受区间范围增大的影响很小,迭代次数少,收敛更快。文献[22]考虑了输入变量的相关性,将区间变量的相关性转换成不等式约束,进一步约束了求解区间数。从本质上来说,现有的仿射型区间潮流都是利用泰勒展开构建区间数的仿射形式。这种方式无法适用于大范围的区间波动,当区间数较大时,区间潮流存在不收敛的情况;同时在进行噪声元系数的求解时,需要进行雅可比矩阵求逆计算或增大了区间潮流的计算量,甚至导致某些病态潮流下求解不可行^[1,23]。

切比雪夫仿射方法是一类基于切比雪夫多项式构造的新型仿射算术。与泰勒级数的经典仿射方法不同,切比雪夫仿射算术通过切比雪夫多项式构造高阶多项式来逼近区间,直接利用切比雪夫多项式构造仿射算子,其仿射系数求解方法为:在输入区间变量范围内抽取若干个内插值点来求解相应系数^[24-25]。这一过程并不需要求解潮流方程的雅可比

矩阵和海森矩阵,并且在每一个输入区间变量内插值点处的确定性潮流问题具有天然的并行性,极大地提高了仿射区间潮流的计算效率。切比雪夫多项式逼近基于最佳一致逼近理论,即在给定区间上,使逼近多项式与被逼近函数的最大误差最小化,使得切比雪夫仿射计算在整个区间内都能提供较为均匀的逼近精度,可以避免泰勒展开仿射计算在远离展开点时误差迅速增大的问题。

为此,本文基于切比雪夫多项式提出了配电网切比雪夫仿射潮流计算方法。首先根据切比雪夫仿射模型建立节点电压幅值和相角(实部和虚部)的切比雪夫仿射算子;然后将节点电压幅值和相角(实部和虚部)的切比雪夫仿射算子代入到原始潮流方程中,重构潮流方程,得到节点电压幅值和相角(实部和虚部)关于噪声元的线性优化模型。针对输入不确定性变量之间的相关性建模,采用混合盒式-椭球集合对分布式风电场输出功率的相关性^[26-28]进行建模。最后在两个配电网算例中验证了本文所提配电网切比雪夫仿射潮流计算方法的有效性。

1 切比雪夫仿射方法

1.1 切比雪夫多项式

对于一个区间变量 $[x]$,可以用区间中值 x^c 和扰动量 Δx 进行表示,即

$$[x] = x^c + [\Delta x] = [x^c - \Delta x, x^c + \Delta x] \quad (1)$$

式中: $[\Delta x]$ 为区间变量 $[x]$ 的对称区间。假设实函数 $f([x])$ 在区间变量 $[x]$ 上 $m+1$ 阶连续可微,则对其在 x^c 处进行 $m+1$ 阶泰勒级数展开,可表达为

$$f([x]) = f(x^c) + f'(x^c)[\Delta x] + \dots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(x^c)[\Delta x]^m + \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x^c)[\Delta x]^{m+1} + O([\Delta x]) \quad (2)$$

式中: $O([\Delta x])$ 表示无穷小量; $f^{(m)}(x^c)$ 表示实函数 f 在 x^c 处的 m 阶导数。

与泰勒展开将函数 $f([x])$ 在中心点 x^c 附近表示为一阶导数的多项式形式不同,切比雪夫多项式逼近是将函数 $f([x])$ 在区间 $[-1,1]$ 上表示为切比雪夫多项式的线性组合。如果一维函数 $f([x]) \in C[a,b]$,则将其转化为基于切比雪夫级数的 k 阶多项式,如式(3)所示。

$$f([x]) \approx \frac{1}{2} f_0 + \sum_{i=1}^k f_i \cos(i\theta) \quad (3)$$

式中: $\theta = \arccos(\xi) \in [0, \pi]$; f_0 为切比雪夫多项式的常数项; f_i 为多项式系数,是一个常实数,可由

式(4)计算得到。

$$f_i = \frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} f(\cos \theta_j) \cos(i\theta_j) \quad (4)$$

$$\theta_j = \frac{2j-1}{k+1} \pi; j=1, 2, \dots, k+1 \quad (5)$$

进一步从一维问题拓展到多维问题, 假设 n 维函数 $f[\mathbf{x}]$ 在多维区间向量 $\mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ 上连续, 则其 k 阶 n 维 Chebyshev 多项式展开可表达为

$$f^*(\xi) = \sum_{j_1=0}^k \dots \sum_{j_n=0}^k \left(\frac{1}{2}\right)^p f_{j_1, \dots, j_n}^* \cos(j_1\theta_1) \dots \cos(j_n\theta_n) \quad (6)$$

$$\theta_l = \frac{(2l-1)\pi}{2(k+1)}; l=1, 2, \dots, k+1 \quad (7)$$

$$\xi_i = \frac{a_i + b_i}{2} + \frac{b_i - a_i}{2} \cos \theta_i; i=1, 2, \dots, n \quad (8)$$

式中: f_{j_1, \dots, j_n}^* 表示 n 维 Chebyshev 系数; p 为系数 f_{j_1, \dots, j_n}^* 下标中包含 0 的数量。Chebyshev 多项式系数 f_{j_1, \dots, j_n}^* 由式(9)计算。

$$f_{j_1, \dots, j_n}^* = \left(\frac{2}{k+1}\right)^n \sum_{l_1=1}^{k+1} \dots \sum_{l_n=1}^{k+1} f^*(\theta_{l_1}, \dots, \theta_{l_n}) \cos(j_1\theta_{l_1}) \dots \cos(j_n\theta_{l_n}) \quad (9)$$

式中: l_n 为插值点索引; $k+1$ 为每一维的插值点个数; $\theta_{l_1}, \dots, \theta_{l_n}$ 为插值点; $f^*(\theta_{l_1}, \dots, \theta_{l_n})$ 为 $f[\mathbf{x}]$ 在插值点处的值。

1.2 切比雪夫仿射模型

仿射算法将不确定区间变量 \mathbf{x} 转换成仿射形式 $\hat{\mathbf{x}}$ 进行计算。假设 $\mathbf{x} = [\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}]$, $\hat{\mathbf{x}}$ 的表达式为

$$\hat{\mathbf{x}} = x_0 + x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + \dots + x_m \varepsilon_m = x_0 + \sum_{i=1}^m x_i \varepsilon_i \quad (10)$$

式中: x_0 为中心值, $x_0 = (\underline{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{x}}) / 2$; ε_i 为噪声元; x_i 为对应的噪声元系数。噪声元之间相互独立, 且满足 $\varepsilon_i = [-1, 1] (i=1, 2, \dots, m)$ 。

根据仿射算法对式(6)进行分析, 由于 $\theta \in [0, \pi]$, 可以将 $\cos(j_1\theta_1) \dots \cos(j_n\theta_n)$ 转化成仿射噪声元 $\varepsilon_{j_1, \dots, j_n}$, 得到 Chebyshev 仿射模型为

$$f^*(\xi) = \sum_{j_1=0}^k \dots \sum_{j_n=0}^k \left(\frac{1}{2}\right)^p f_{j_1, \dots, j_n}^* \varepsilon_{j_1, \dots, j_n} \quad (11)$$

2 配电网切比雪夫仿射潮流计算

2.1 两类坐标系的配电网切比雪夫仿射潮流模型

2.1.1 配电网切比雪夫仿射潮流模型

设系统总共有 n 个节点, 其中, 节点编号 $1, 2, \dots, m$

为 PQ 节点, 节点编号 $(m+1), \dots, (n-1)$ 为 PV 节点, 节点编号 n 为平衡节点。采用极坐标系的潮流方程可表示为

$$\begin{cases} U_i \sum_{j=1}^n U_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) - (P_{Wi} - P_{Li}) = 0, \\ i \in (PQ + PV) = n-1 \\ U_i \sum_{j=1}^n U_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) - (Q_{Wi} - Q_{Li}) = 0, \\ i \in PQ = m \end{cases} \quad (12)$$

式中: P_{Wi} 、 Q_{Wi} 分别为节点 i 处分布式风电输出有功、无功功率; P_{Li} 、 Q_{Li} 分别为节点 i 处负荷有功、无功功率需求; U_i 、 U_j 分别为节点 i 、 j 的电压幅值; θ_{ij} 为节点 i 与节点 j 之间的电压相角差; G_{ij} 和 B_{ij} 分别为节点导纳矩阵的第 i 行、第 j 列元素的实部和虚部。

考虑分布式风电输出有功、无功功率具有不确定性, 分布式风电输出有功、无功功率分别采用区间变量表示为

$$\begin{cases} P_{Wi} = [\underline{P_{Wi}}, \overline{P_{Wi}}] \\ Q_{Wi} = [\underline{Q_{Wi}}, \overline{Q_{Wi}}] \end{cases} \quad (13)$$

式中: $\underline{P_{Wi}}$ 、 $\overline{P_{Wi}}$ 分别为节点 i 处分布式风电输出最小、最大有功功率; $\underline{Q_{Wi}}$ 、 $\overline{Q_{Wi}}$ 分别为节点 i 处分布式风电输出最小、最大无功功率。在求解过程中, 将分布式风电输出有功功率 P_{Wi} 、无功功率 Q_{Wi} 作为不确定性参数, 当 n 维 Chebyshev 展开阶数为 k 时, 这些参数的插值点计算公式为

$$\begin{cases} P_{Wi}^l = \frac{\underline{P_{Wi}} + \overline{P_{Wi}}}{2} + \frac{\overline{P_{Wi}} - \underline{P_{Wi}}}{2} \cos \theta_l \\ Q_{Wi}^l = \frac{\underline{Q_{Wi}} + \overline{Q_{Wi}}}{2} + \frac{\overline{Q_{Wi}} - \underline{Q_{Wi}}}{2} \cos \theta_l \end{cases} \quad l=1, 2, \dots, k+1 \quad (14)$$

将式(14)计算所得到的有功、无功功率的插值点代入到式(12)中, 可得

$$\begin{cases} U_i \sum_{j=1}^n U_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) - (P_{Wi}^l - P_{Li}) = 0, \\ i \in (PQ + PV) = n-1 \\ U_i \sum_{j=1}^n U_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) - (Q_{Wi}^l - Q_{Li}) = 0, \\ i \in PQ = m \end{cases} \quad (15)$$

求解式(15)得到插值点对应的确定性潮流解 U_i^l 、 θ_{ij}^l , 并将结果分别代入到式(16)中, 得到电压幅值和相角的 Chebyshev 系数为

$$\begin{cases} U_{i,j_1,\dots,j_n}^l = \left(\frac{2}{k+1}\right)^n \\ \sum_{l_1=1}^{k+1} \dots \sum_{l_n=1}^{k+1} U_{i,j_1,\dots,j_n}^l(\theta_{l_1}, \dots, \theta_{l_n}) \cos(j_1 \theta_{l_1}) \dots \cos(j_n \theta_{l_n}) \\ \theta_{ij,j_1,\dots,j_n}^l = \left(\frac{2}{k+1}\right)^n \\ \sum_{l_1=1}^{k+1} \dots \sum_{l_n=1}^{k+1} \theta_{ij,j_1,\dots,j_n}^l(\theta_{l_1}, \dots, \theta_{l_n}) \cos(j_1 \theta_{l_1}) \dots \cos(j_n \theta_{l_n}) \end{cases} \quad (16)$$

进一步将式(16)所求得的 Chebyshev 系数代入到式(17)中, 得到电压幅值和相角的 Chebyshev 展开式为

$$\begin{cases} U_i(\xi) = \sum_{j_1=0}^k \dots \sum_{j_n=0}^k \left(\frac{1}{2}\right)^p U_{i,j_1,\dots,j_n}^l \cos(j_1 \theta_{j_1}) \dots \cos(j_n \theta_{j_n}) \\ \theta_{ij}(\xi) = \sum_{j_1=0}^k \dots \sum_{j_n=0}^k \left(\frac{1}{2}\right)^p \theta_{ij,j_1,\dots,j_n}^l \cos(j_1 \theta_{j_1}) \dots \cos(j_n \theta_{j_n}) \end{cases} \quad (17)$$

对式(17)进行仿射转化, 得到电压幅值和相角的 Chebyshev 仿射表达式为

$$\begin{cases} U_i(\xi) = \sum_{j_1,\dots,j_n \in [1,\dots,k]} \left(\frac{1}{2}\right)^p U_{i,j_1,\dots,j_n}^l \varepsilon_{j_1,\dots,j_n} \\ \theta_{ij}(\xi) = \sum_{j_1,\dots,j_n \in [1,\dots,k]} \left(\frac{1}{2}\right)^p \theta_{ij,j_1,\dots,j_n}^l \varepsilon_{j_1,\dots,j_n} \end{cases} \quad (18)$$

若采用直角坐标形式表示节点电压, 则潮流方程需增加 PV 节点的电压方程, 因此采用直角坐标系的潮流方程可表示为

$$\begin{cases} e_i \sum_{j=1}^n (G_{ij} e_j - B_{ij} f_j) + f_i \sum_{j=1}^n (G_{ij} f_j + B_{ij} e_j) - (P_{Wi} - P_{Li}) = 0, \\ i \in (PQ + PV) = n - 1 \\ f_i \sum_{j=1}^n (G_{ij} e_j - B_{ij} f_j) - e_i \sum_{j=1}^n (G_{ij} f_j + B_{ij} e_j) - (Q_{Wi} - Q_{Li}) = 0, \\ i \in PQ = m \\ U_i^2 = e_i^2 + f_i^2, i \in PV = n - m - 1 \end{cases} \quad (19)$$

式中: e_i 、 f_i 分别为节点 i 的电压实部和虚部。直角坐标系与极坐标系仿射模型求解过程相同, 电压实部和虚部 Chebyshev 仿射表达式如式(20)所示。

$$\begin{cases} e_i(\xi) = \sum_{j_1,\dots,j_n \in [1,\dots,k]} \left(\frac{1}{2}\right)^p e_{i,j_1,\dots,j_n}^l \varepsilon_{j_1,\dots,j_n} \\ f_i(\xi) = \sum_{j_1,\dots,j_n \in [1,\dots,k]} \left(\frac{1}{2}\right)^p f_{ij,j_1,\dots,j_n}^l \varepsilon_{j_1,\dots,j_n} \end{cases} \quad (20)$$

2.1.2 配电网切比雪夫仿射优化潮流模型

对于极坐标系, 利用区间变量 $U_i(\xi)$ 、 $\theta_{ij}(\xi)$ 的仿射方程(18)可直接计算出节点电压/幅值的区间范

围, 但存在较大的区间误差, 即区间扩张效应。为此, 将该仿射形式代入极坐标系区间潮流方程中, 形成关于 $\varepsilon_{j_1,\dots,j_n}$ 噪声元的重构潮流方程。

$$\begin{cases} P_{Wi}^l(\xi) = U_i(\xi) \sum_{j=1}^n U_j(\xi) (G_{ij} \cos \theta_{ij}(\xi) + B_{ij} \sin \theta_{ij}(\xi)) + P_{Li}, \\ i \in (PQ + PV) = n - 1 \\ Q_{Wi}^l(\xi) = U_i(\xi) \sum_{j=1}^n U_j(\xi) (G_{ij} \sin \theta_{ij}(\xi) - B_{ij} \cos \theta_{ij}(\xi)) + Q_{Li}, \\ i \in PQ = m \end{cases} \quad (21)$$

通过重构的节点注入有功/无功功率方程进行噪声元约束, 以构造的节点电压幅值/相角仿射形式为目标函数, 形成基于线性优化的仿射潮流模型如式(22)和式(23)所示。

$$\min(\max) \begin{cases} U_i(\xi) = \sum_{j_1,\dots,j_n \in [1,\dots,k]} \left(\frac{1}{2}\right)^p U_{i,j_1,\dots,j_n}^l \varepsilon_{j_1,\dots,j_n} \\ \theta_{ij}(\xi) = \sum_{j_1,\dots,j_n \in [1,\dots,k]} \left(\frac{1}{2}\right)^p \theta_{ij,j_1,\dots,j_n}^l \varepsilon_{j_1,\dots,j_n} \end{cases} \quad (22)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \underline{P}_{Wi} \leq P_{Wi}^l(\xi) \leq \overline{P}_{Wi}, i \in (1, n-1) \\ \underline{Q}_{Wi} \leq Q_{Wi}^l(\xi) \leq \overline{Q}_{Wi}, i \in (1, m) \\ -1 \leq \varepsilon_{j_1,\dots,j_n} \leq 1, j_1, \dots, j_n \in [1, \dots, k] \end{cases} \quad (23)$$

与极坐标系相同, 直角坐标系下同样需要将节点电压实部和虚部的仿射形式代入潮流方程中, 以压缩噪声元范围。重构潮流方程可表示为

$$\begin{cases} P_{Wi}(\xi) = e_i(\xi) \sum_{j=1}^n (G_{ij} e_j(\xi) - B_{ij} f_j(\xi)) + \\ f_i \sum_{j=1}^n (G_{ij} f_j(\xi) + B_{ij} e_j(\xi)) + P_{Li}, i = n - 1 \\ Q_{Wi}(\xi) = f_i(\xi) \sum_{j=1}^n (G_{ij} e_j(\xi) - B_{ij} f_j(\xi)) - \\ e_i(\xi) \sum_{j=1}^n (G_{ij} f_j(\xi) + B_{ij} e_j(\xi)) + Q_{Li}, i = m \\ U_i^2(\xi) = e_i^2(\xi) + f_i^2(\xi), i \in PV = n - m - 1 \end{cases} \quad (24)$$

通过重构的节点注入有功/无功功率方程进行噪声元约束, 以构造的节点电压幅值/相角仿射形式为目标函数, 形成基于线性优化的仿射潮流模型如式(25)和式(26)所示。

$$\min(\max) \begin{cases} U_i(\xi) = \sqrt{e_i(\xi)^2 + f_i(\xi)^2} \\ \theta_i(\xi) = \arctan\left(\frac{f_i(\xi)}{e_i(\xi)}\right) \end{cases} \quad (25)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} P_{Wi} \leq P_{Wi}^l(\xi) \leq \overline{P_{Wi}}, i \in (1, n-1) \\ Q_{Wi} \leq Q_{Wi}^l(\xi) \leq \overline{Q_{Wi}}, i \in (1, m) \\ -1 \leq \varepsilon_{j_1, \dots, j_n} \leq 1, j_1, \dots, j_n \in [1, \dots, k] \end{cases} \quad (26)$$

2.2 混合盒式-椭球集合的区间变量相关性建模

在 2.1 节建立的配电网 Chebyshev 仿射优化潮流模型式(22)、式(23)和式(25)、式(26)中, 并未考虑分布式风电场出力之间的相关性, 即输入区间数之间的相关性。传统线性相关性难以刻画这种复杂的关系。Copula 相关性虽能描述多种相依结构, 但在实际应用中, 获取其所需的特定参数和函数形式可能存在困难。因此, 本节采用混合盒式-椭球集合相关性模型对输入区间进行相关性建模, 以表征相关性对不确定性潮流分布的影响。如图 1 所示, 设两个输入区间 $\hat{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$, $\hat{y} = [\underline{y}, \overline{y}]$, x^w 、 y^w 分别为输入区间 \hat{x} 、 \hat{y} 的区间半径; x^c 、 y^c 分别为输入区间 \hat{x} 、 \hat{y} 的中心值。其中混合盒式-椭球集合相关性模型可表示为

$$\Omega_{\text{box}} = \{X \mid \|\rho^{-1} T^{-1} R^{-1} (X - X^c)\| \leq e\} \quad (27)$$

$$\Omega_{\text{ellipsoidal}} = \{X \mid (X - X^c)^T C^{-1} (X - X^c) \leq e\} \quad (28)$$

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{cases} T = \text{diag}\{w_1, w_2, \dots, w_i\} \\ w_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^2 |\rho_{ij}|} \end{cases} \quad (30)$$

$$R = \begin{bmatrix} x^w & 0 \\ 0 & y^w \end{bmatrix} \quad (31)$$

式中: Ω_{box} 、 $\Omega_{\text{ellipsoidal}}$ 分别表示盒式集合和椭球集合; $X = [\hat{x}, \hat{y}]^T$ 表示输入区间数; X^c 为分布式风电场出力有功功率 P_{Wi} 和无功功率 Q_{Wi} 的期望值组成的向量; ρ_{xy} 为 \hat{x} 、 \hat{y} 的相关系数; C 为协方差矩阵。 \hat{x} 、 \hat{y} 的协方差为

$$\text{Cov}_{xy} = \rho_{xy} \sqrt{D_x D_y} = \frac{\tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)} (D_x - D_y) \quad (32)$$

式中: D_x 、 D_y 分别为 \hat{x} 、 \hat{y} 的方差; θ 为椭球的倾斜角。

将输入区间的相关性模型通过坐标变换转化为仿射约束条件嵌入到仿射型潮流约束条件式(23)和式(26)中, 以实现配电网区间潮流的相关性建模。详细推导过程见文献[29]。考虑混合盒式-椭球集合相关性模型的仿射型潮流约束条件如式(33)所示。

$$\begin{cases} \text{式(23)/式(26)} \\ \inf(\hat{Y}_i^l) \leq k_i^l A_j^l + A_k^l \leq \sup(\hat{Y}_i^l), i = 1, 2 \\ \inf(\hat{Y}_5^l) \leq \frac{D^2}{r_1^2} + \frac{E^2}{r_2^2} \leq \sup(\hat{Y}_5^l) \\ D = (A_j^l - x^c) \cos \theta + (A_k^l - y^c) \sin \theta \\ E = (A_k^l - y^c) \cos \theta - (A_j^l - x^c) \sin \theta \end{cases} \quad (33)$$

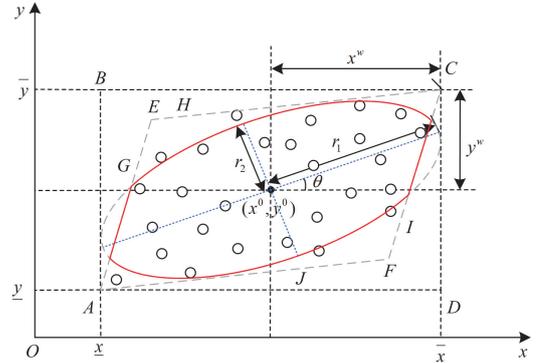


图 1 混合盒式-椭球集合相关性模型示意图

Fig. 1 Schematic diagram of hybrid box-ellipsoid sets correlation model

2.3 考虑相关性的配电网切比雪夫仿射潮流计算流程

将 2.2 节建立的混合盒式-椭球集合的区间变量相关性潮流约束条件替换仿射优化模型中的不考虑相关性的仿射型约束条件式(23)和式(26), 就可以求解得到考虑相关性的区间潮流解。综上所述, 考虑相关性的配电网切比雪夫仿射潮流计算流程如图 2 所示。

具体步骤叙述如下:

1) 输入配电网潮流模型的初始数据, 然后基于历史数据统计分析, 得到分布式风电场出力之间的相关性系数;

2) 利用式(14)计算区间数分布式风电场有功和无功功率的插值点, 并分别对插值点进行确定性潮流计算, 得到对应插值点的 Chebyshev 多项式系数, 建立待求变量 e 和 f (U 和 θ) 的 Chebyshev 仿射表达式;

3) 将待求变量 e 和 f (U 和 θ) 的 Chebyshev 仿射表达式代入到潮流方程式(15)和式(19)中, 形成关于噪声元重构潮流方程式(21)一式(23)以及式(24)一式(26);

4) 考虑输入变量之间的相关性, 将混合盒式-椭球集合相关性模型对应的约束条件式(33)嵌入到仿射潮流模型式(21)和式(24)中, 计算考虑相关性的 Chebyshev 仿射潮流解。

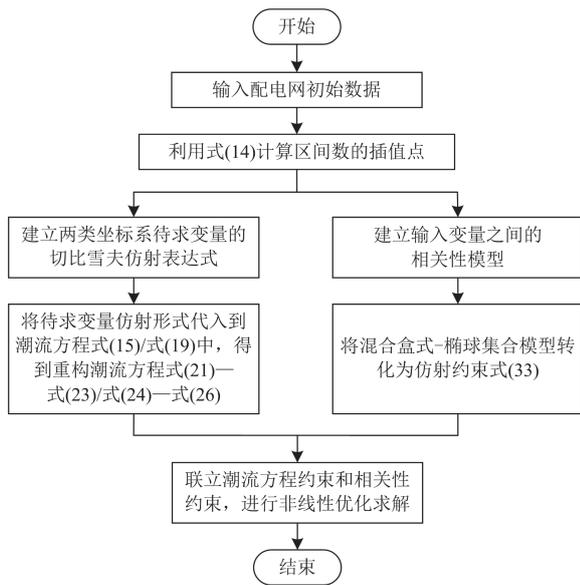


图 2 考虑相关性的配电网切比雪夫仿射潮流计算流程图
Fig. 2 Chebyshev affine power flow calculation flowchart for distribution networks considering correlation

3 算例分析

3.1 算例系统

本文采用 IEEE33 节点和 IEEE69 节点配电网, 其拓扑分别如附录 A 图 A1 和图 A2 所示。考虑分布式风电场注入功率的不确定性, 在 IEEE33 节点配电网的节点 6、14、23、32 上分别接入分布式风电场, 分布式风电场输出功率均为 $1000 + j200$ kW。在 IEEE69 节点配电网的节点 16、25、33、53 上分别接入分布式风电场, 分布式风电场输出功率均为 $1000 + j200$ kW。假设分布式风电场注入功率的波动区间为其期望值的 $\pm 10\%$ 。附录 A 表 A1、表 A2 分别为 IEEE33 节点和 IEEE69 节点配电网支路编号。

3.2 切比雪夫仿射潮流算法性能分析

本节选取上述 IEEE33 节点和 IEEE69 节点配电网作为算例, 分别采用蒙特卡洛方法、两类坐标系的配电网泰勒展开仿射潮流方法和本文提出的两类坐标系的配电网切比雪夫仿射潮流方法进行求解, 仿真中所有的迭代收敛精度均设置为 10^{-6} 。其中蒙特卡洛方法在区间变量波动范围内模拟 100 000 次, 且采样数默认服从均匀分布, 因此将蒙特卡洛方法获得的区间解集作为基准结果。

附录 A 图 A3(a)、(b)、(c)、(d)分别为采用 5 种方法对 IEEE33 节点配电网的节点电压幅值、节点电压相角、支路有功功率和支路无功功率的求解区间。附录 A 图 A4(a)、(b)、(c)、(d)分别为采用 5 种方法对 IEEE69 节点配电网的节点电压幅值、节点

电压相角、支路有功功率和支路无功功率的求解区间。附录 A 表 A3、表 A4 分别为两类坐标系的 4 种方法相较于蒙特卡洛法对 IEEE33 节点配电网的节点电压幅值、节点电压相角、支路有功功率和支路无功功率的求解误差。附录 A 表 A5、表 A6 分别为两类坐标系的 4 种方法相较于蒙特卡洛法对 IEEE69 节点配电网的节点电压幅值、节点电压相角、支路有功功率和支路无功功率的求解误差。附录 A 图 A5(a)、(b)、(c)、(d)为不同区间波动下, 分别采用 5 种方法对 IEEE33 节点配电网的部分节点电压幅值、节点电压相角、支路有功功率和支路无功功率的求解区间。附录 A 图 A6(a)、(b)、(c)、(d)为不同区间波动下, 分别采用 5 种方法对 IEEE69 节点配电网的部分节点电压幅值、节点电压相角、支路有功功率和支路无功功率的求解区间。附录 A 表 A7 为 3 种算法在不同系统中的两类坐标系下的计算时间对比。附录 A 图 A7(a)、(b)、(c)、(d)分别为不同阶数下, 两类坐标系的配电网 Chebyshev 仿射潮流方法对 IEEE33 节点配电网的节点电压幅值、节点电压相角、支路有功功率和支路无功功率的求解区间。附录 A 表 A8—表 A15 分别为不同阶数 k 时, 两类坐标系的配电网 Chebyshev 仿射潮流方法对 IEEE33 节点配电网的部分节点电压幅值、节点电压相角、支路有功功率和支路无功功率的求解区间结果。

从附录 A 图 A3、图 A4 中可以看出: 在对节点电压幅值和支路有功功率求解时, Chebyshev 仿射潮流模型在两类坐标系下的求解结果和泰勒展开仿射潮流模型在直角坐标系下的求解结果非常接近, 并且严格包含蒙特卡洛求解区间结果; 然而泰勒展开仿射潮流模型在极坐标系下求解时, 存在过度收敛问题, 导致求解区间窄于蒙特卡洛求解区间。在对节点电压相角和支路无功功率求解时, Chebyshev 仿射潮流模型在两类坐标系下的求解结果和泰勒展开仿射潮流模型在两类坐标系下的求解结果均严格包含蒙特卡洛求解区间结果, Chebyshev 仿射潮流模型在两类坐标系下的求解结果非常接近, 并且窄于泰勒展开仿射潮流模型在两类坐标系下的求解结果。其中, 泰勒展开仿射潮流模型在直角坐标系下的求解结果窄于泰勒展开仿射潮流模型在极坐标系下的求解结果。

进一步, 从附录 A 表 A3—表 A6 中数据可以看出, 在两类坐标系下, Chebyshev 仿射潮流模型的 4 种待求变量的结果误差相近, 而泰勒展开仿射潮流模型的 4 种待求变量的结果误差相差较大。这进一步验证了本文提出的 Chebyshev 仿射潮流模型的求解稳定性。基于 IEEE33 节点的仿真表明: 在直角

坐标系下, Chebyshev 仿射潮流模型在节点电压幅值和支路有功功率上的平均误差略高于泰勒模型(差值分别为 0.0009%和 0.0944%),但在电压相角和无功功率上的误差远小于泰勒展开仿射潮流模型(差值分别为-9.2834%和-5.749%)。而在极坐标系下, Chebyshev 模型在所有变量(电压幅值、相角、支路有功及无功功率)上的平均误差均小于泰勒模型,差值依次为-0.0003%、-15.4512%、-3.0537%和-40.2501%。

综上所述, Chebyshev 仿射潮流模型在两类坐标系下进行求解时,所求得的各项区间解均与蒙特卡洛求解区间十分接近,并且严格包含了蒙特卡洛求解区间结果,表现出良好的稳定性和精确性;然而泰勒展开仿射潮流模型在两类坐标系下进行求解时,在直角坐标系下求解结果和在极坐标系下求解结果存在较大的差异。这是由于在求解待求变量的仿射形式时, Chebyshev 仿射潮流模型通过在插值点进行确定性潮流计算得到仿射系数,确定性潮流中极坐标系潮流模型和直角坐标系潮流模型是可以相互转换的,因此两类坐标系下所得到的仿射系数相同。而泰勒展开仿射潮流模型的仿射系数则是通过雅可比矩阵求逆得到的,泰勒展开仿射潮流模型在极坐标系下求解时,会受到强非线性三角函数 \sin 和 \cos 的影响,导致其求解精度过低或出现过度收敛的情况。

进一步,附录 A 图 A5、图 A6 中给出了不同波动区间下,分别采用 5 种方法对 IEEE33、IEEE69 节点配电网的部分节点电压幅值、节点电压相角、支路有功功率和支路无功功率的求解区间。其中,注入功率波动区间从期望值的 $\pm 10\%$ 增加到 $\pm 50\%$ 。从图中可以看出:在求解电压幅值和支路有功功率时,随着注入功率波动区间的增加,5 种方法求解区间结果呈近似线性增加。Chebyshev 仿射潮流模型在两类坐标系下的求解结果曲线和泰勒展开仿射潮流模型在直角坐标系下的求解结果曲线的斜率近似,并且均略微大于蒙特卡洛求解结果曲线的斜率。极坐标系下的泰勒展开仿射潮流模型在这一过程中一直存在过度收敛问题,因此不进行比较。在求解电压相角和支路无功功率时,两类坐标系下的 Chebyshev 仿射潮流模型求解结果曲线和两类坐标系下的泰勒展开仿射潮流模型求解结果曲线的斜率均大于蒙特卡洛求解结果曲线的斜率。两类坐标系下的 Chebyshev 仿射潮流模型求解结果曲线斜率依旧近似,并且小于直角坐标系下的泰勒展开仿射潮流模型求解结果曲线的斜率。其中,泰勒展开仿射

潮流模型在直角坐标系下求解结果曲线的斜率小于泰勒展开仿射潮流模型在极坐标系下求解结果曲线的斜率。

这一现象说明,随着波动区间的增加,两类坐标系下的切比雪夫仿射潮流模型求解区间的增速近似,且小于等于两类坐标系下的泰勒展开仿射潮流模型求解区间的增速。一方面再次验证了切比雪夫仿射潮流模型的稳定性,不会受到坐标系不同的影响;另一方面验证了切比雪夫仿射潮流模型的有效性,即切比雪夫仿射潮流模型比泰勒展开潮流模型更适合于较大波动区间下的不确定性潮流分析场景。

为进一步分析不同算法的计算效率问题,在 IEEE33 节点配电网和 IEEE69 节点配电网中,分别设置区间波动变化范围从 $\pm 10\%$ 至 $\pm 50\%$,统计各算法所需的求解时间。附录 A 表 A7 为不同算法的平均计算时间对比。从表中数据可以看出,在系统相同时,本文所提 Chebyshev 仿射算法计算时间随波动区间范围的增大而增大;随着系统规模的增大,计算时间也随之增加;并且 Chebyshev 仿射算法在极坐标系下比在直角坐标系下具有更高的计算效率。对比 3 种算法之间的计算时间可以看出,由于蒙特卡洛需要进行多次重复确定性潮流计算,并且其精度与计算次数密切相关,以此所需计算时间最长,计算效率最低;泰勒展开仿射算法在求解过程中涉及到雅可比矩阵的求逆和海森矩阵的求解,因此计算时间比 Chebyshev 仿射算法长,计算效率比 Chebyshev 仿射算法低;Chebyshev 仿射算法在极坐标系下时,可以直接得到电压幅值和相角的 Chebyshev 仿射表达式,计算过程相对简化,避免了复杂的转换和计算过程,具有更高的计算效率。

附录 A 图 A7 为不同 k 值时的 IEEE33 节点配电网仿真结果图。从图中发现:随着阶数 k 的增大,两类坐标系下的 Chebyshev 仿射潮流模型求解区间高度重合。进一步分析附录 A 表 A8—表 A15,从部分具体求解区间结果来看,随着阶数 k 的增大,两类坐标系下的 Chebyshev 仿射潮流模型求解区间呈现逐渐变窄的趋势,但是这一变窄的现象是微小的,数量级为 10^{-5} 左右。这说明通过 2 阶 Chebyshev 仿射潮流模型所得到待求变量的区间仿射形式可以很好地表示待求变量的区间情况,得到较为精确的区间解。

3.3 混合盒式-椭球集合对切比雪夫仿射潮流算法结果的影响

为验证相关性对 Chebyshev 仿射潮流算法结果的影响,本文建立混合盒式-椭球集合对相关性进行

量化分析。选取 IEEE33 节点配电网作为算例，在 IEEE33 节点配电网的节点 6、14、23、32 上分别接入分布式风电场，分布式风电场输出功率分别为 $900 + j200 \text{ kW}$ 、 $700 + j200 \text{ kW}$ 、 $1000 + j200 \text{ kW}$ 和 $800 + j200 \text{ kW}$ 。考虑 4 个分布式风电场输出功率之间的相关性问题，4 个分布式风电场输出功率之间的相关系数 ρ 分别取 -1、-0.8、-0.4、0、0.4、0.8、1。附录 A 图 A8、图 A9 为不同相关系数下的 IEEE33 节点配电网两类坐标系仿真结果图。从图 A8、图 A9 中可以看出，当分布式风电输出功率相关性为负相关时，配电网 Chebyshev 仿射潮流算法结果随着相关性的增强而变窄；当分布式风电输出功率相关性为正相关时，Chebyshev 仿射潮流算法结果随着相关性的变化而几乎不变。

4 结论

本文围绕配电网不确定性潮流计算方法，基于切比雪夫多项式建立了 Chebyshev 仿射模型，通过计算输入区间变量的内插值点来求解仿射系数，以此确定待求变量的仿射形式；利用 Chebyshev 仿射模型重构潮流方程，得到关于待求变量噪声元的仿射优化模型，并在此基础上嵌入混合盒式-椭球集合相关性模型，提出了考虑相关性的配电网 Chebyshev 仿射潮流计算方法。由配电网 IEEE33 和 IEEE69 节点系统的仿真结果可以得出以下结论。

- 1) Chebyshev 仿射潮流算法可以有效求解配电网区间潮流，与现有泰勒展开仿射潮流算法相比，Chebyshev 仿射潮流算法求解结果具有更高的准确性。
- 2) 随着波动区间的增大，Chebyshev 仿射潮流算法比泰勒展开仿射潮流算法的求解区间增速更小，更适用于较大波动区间下的不确定性潮流分析场景。
- 3) Chebyshev 仿射算法计算时间随着波动区间范围和系统规模的增大而增加，并且 Chebyshev 仿射算法在极坐标下比在直角坐标系下具有更高的计算效率；与泰勒展开仿射潮流算法相比，Chebyshev 仿射潮流算法计算效率更高。
- 4) 随着阶数 k 的增大，Chebyshev 仿射潮流模型求解区间越窄，求得区间结果越精确。在实际配电网潮流计算中，阶数 k 为 2 时就可以很好地表示待求变量的区间情况，得到较为精确的区间解。
- 5) 当分布式风电输出功率相关性为负相关时，配电网 Chebyshev 仿射潮流算法结果随着相关性的增强而变窄；当分布式风电输出功率相关性为正相关时，Chebyshev 仿射潮流算法结果随着相关性的

变化而几乎不变。

附录 A

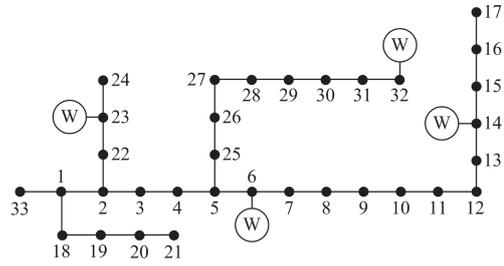


图 A1 IEEE33 节点拓扑图

Fig. A1 IEEE33-bus topology diagram

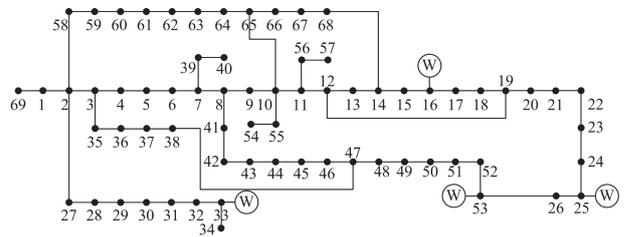
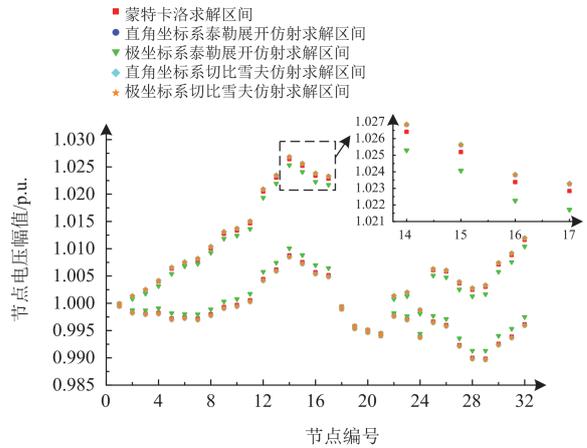
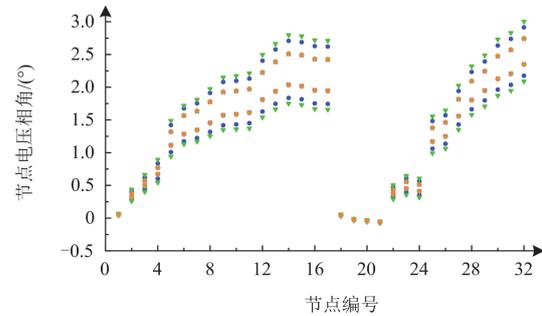


图 A2 IEEE69 节点拓扑图

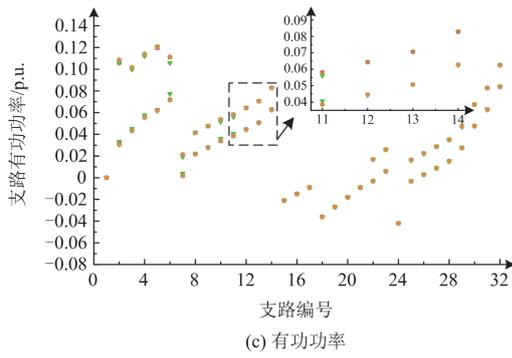
Fig. A2 IEEE69-bus topology diagram



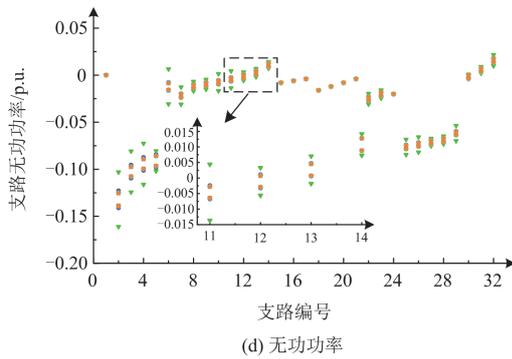
(a) 电压幅值



(b) 电压相角



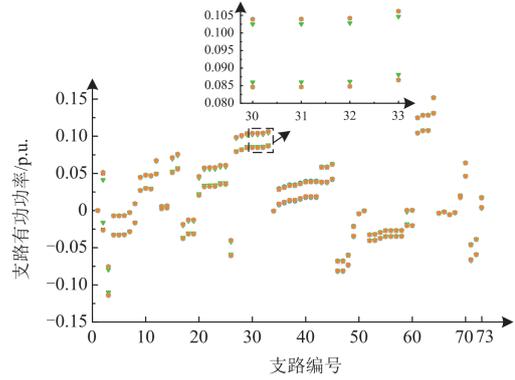
(c) 有功功率



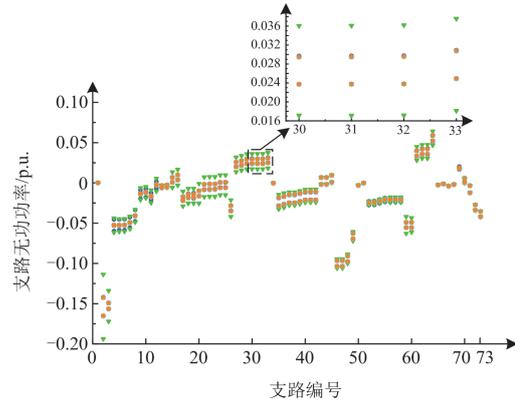
(d) 无功功率

图 A3 IEEE33 节点配电网仿真结果图

Fig. A3 Simulation results of IEEE33-bus distribution network



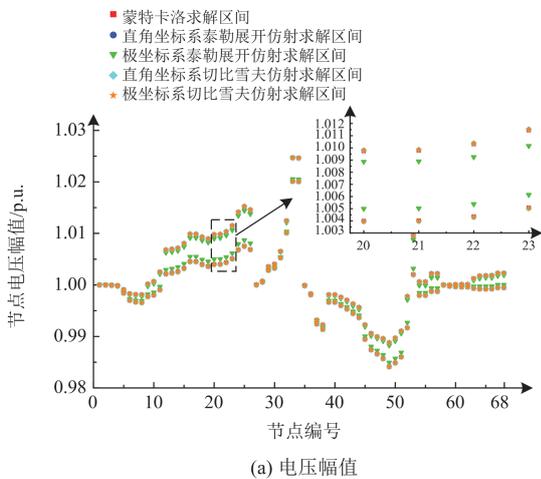
(c) 支路有功功率



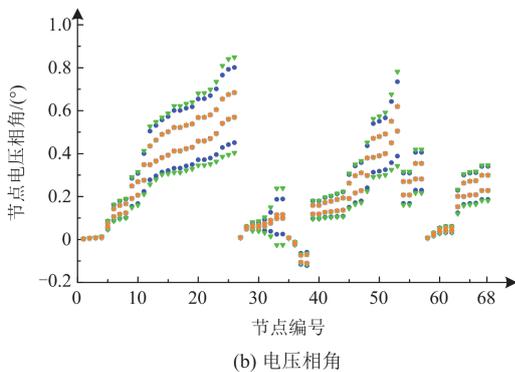
(d) 支路无功功率

图 A4 IEEE69 节点配电网仿真结果图

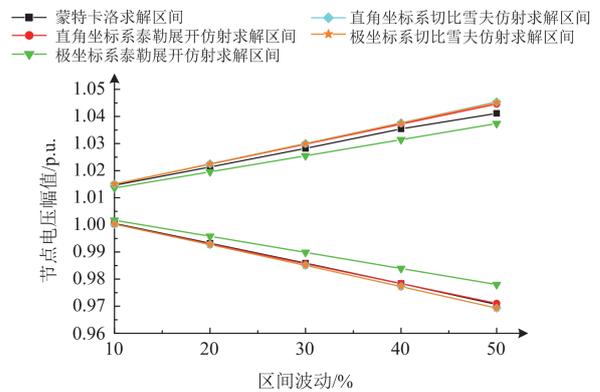
Fig. A4 Simulation results of IEEE69-bus distribution network



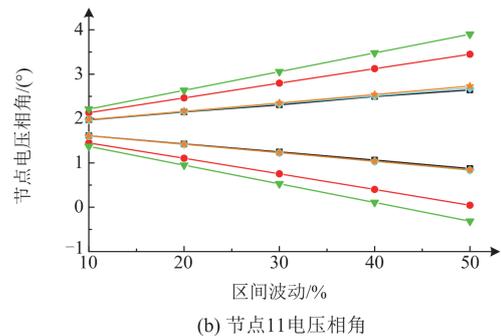
(a) 电压幅值



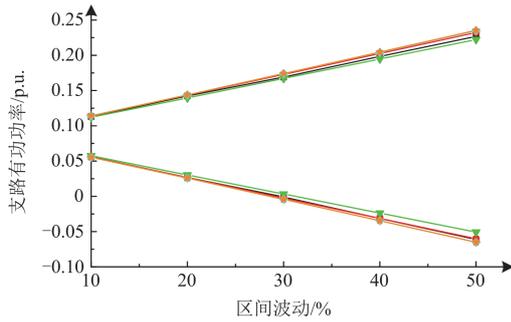
(b) 电压相角



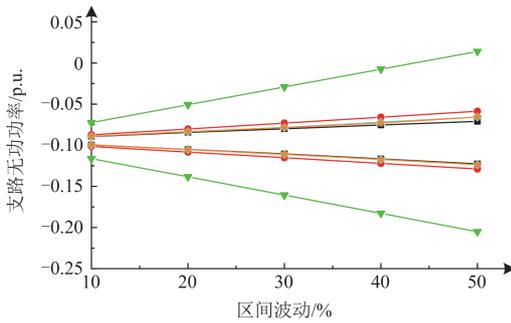
(a) 节点11电压幅值



(b) 节点11电压相角

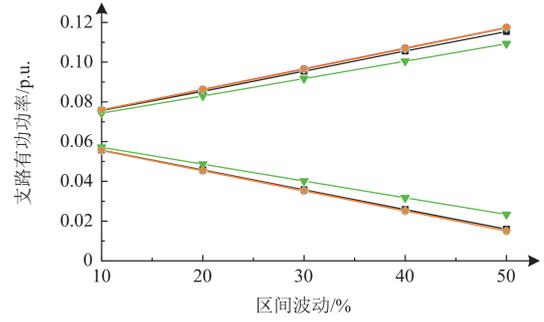


(c) 支路4有功功率

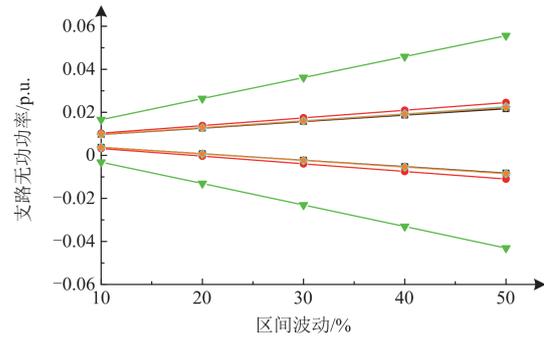


(d) 支路4无功功率

图 A5 不同区间波动下 IEEE33 节点配电网仿真结果图
Fig. A5 Simulation results of IEEE33-bus distribution network under different interval fluctuations



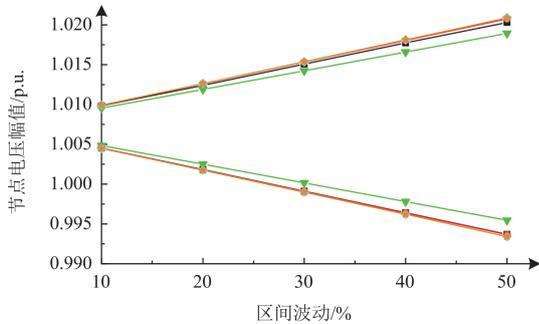
(c) 支路16有功功率



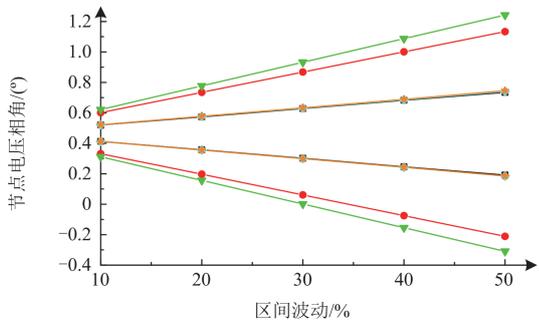
(d) 支路16无功功率

图 A6 不同区间波动下 IEEE69 节点配电网仿真结果图
Fig. A6 Simulation results of IEEE69-bus distribution network under different interval fluctuations

■ 蒙特卡洛求解区间 ◆ 直角坐标系切比雪夫仿射求解区间
 ● 直角坐标系泰勒展开仿射求解区间 ★ 极坐标系切比雪夫仿射求解区间
 ▲ 极坐标系泰勒展开仿射求解区间

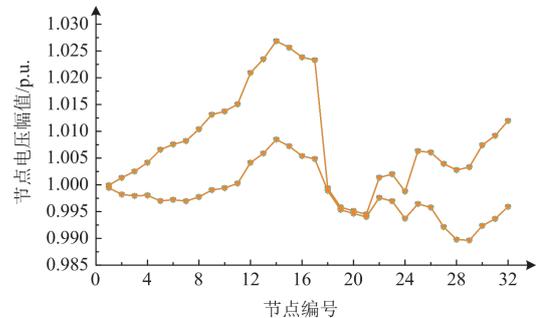


(a) 节点16电压幅值

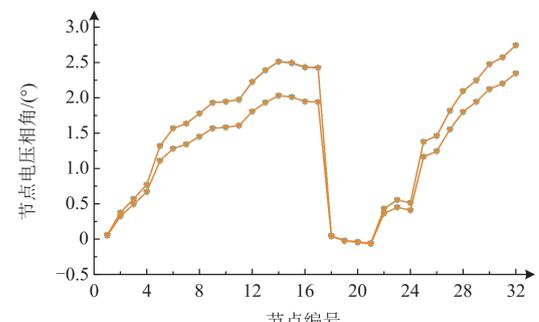


(b) 节点16电压相角

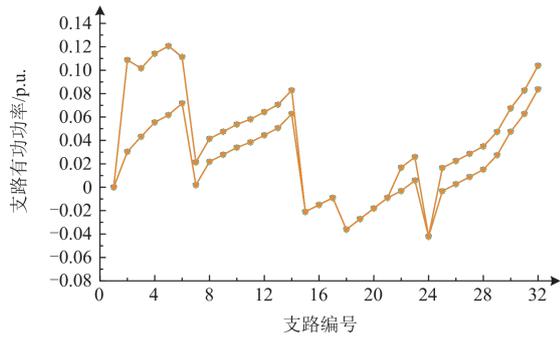
— k=2时直角坐标系下求解区间 — k=2时极坐标系下求解区间
 — k=3时直角坐标系下求解区间 — k=3时极坐标系下求解区间
 — k=4时直角坐标系下求解区间 — k=4时极坐标系下求解区间



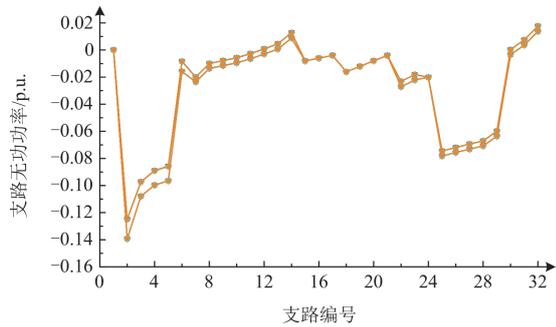
(a) 电压幅值



(b) 电压相角



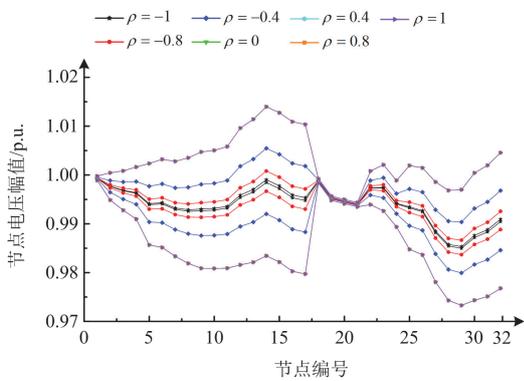
(c) 支路有功功率



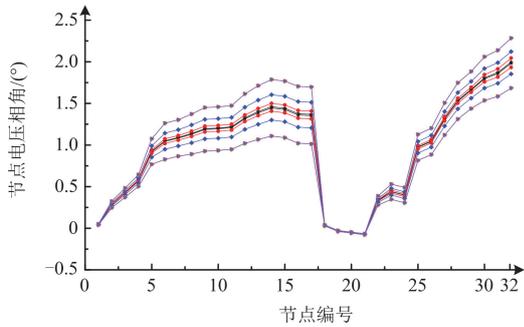
(d) 支路无功功率

图 A7 不同阶数 k 的 IEEE33 节点配电网仿真结果图

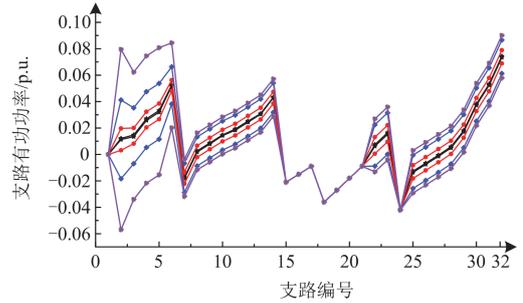
Fig. A7 Simulation results of IEEE33-bus distribution network with different k values



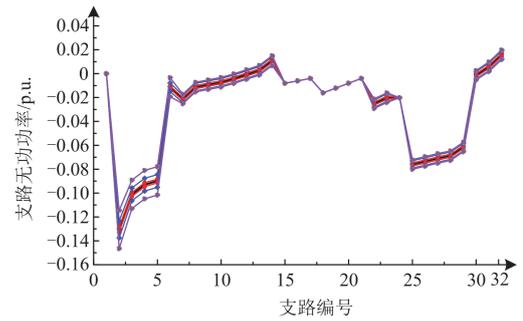
(a) 电压幅值



(b) 电压相角



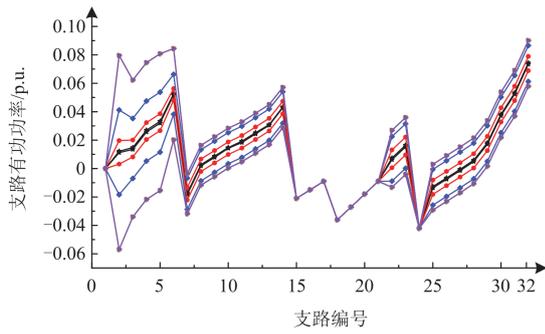
(c) 有功功率



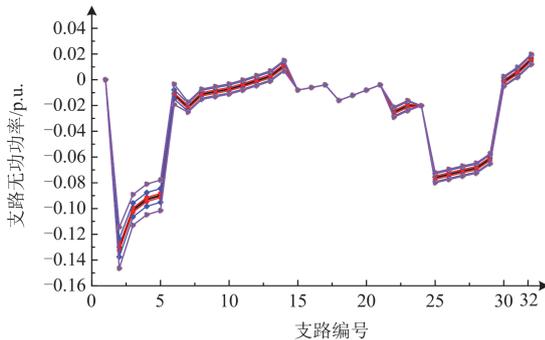
(d) 无功功率

图 A8 不同相关系数下的 IEEE33 节点配电网直角坐标系仿真结果图

Fig. A8 Simulation result of the IEEE33-bus distribution network in the rectangular coordinate system under different correlation coefficients



(c) 有功功率



(d) 无功功率

图 A9 不同相关系数下的 IEEE33 节点配电网极坐标系仿真结果图

Fig. A9 Simulation result of the IEEE33-bus distribution network in the polar coordinate system under different correlation coefficients

表 A1 IEEE33 节点配电网支路编号

Table A1 IEEE33-bus distribution network branch number

编号	支路	编号	支路	编号	支路	编号	支路
1	33-1	9	8-9	17	16-17	25	5-25
2	1-2	10	9-10	18	1-18	26	25-26
3	2-3	11	10-11	19	18-19	27	26-27
4	3-4	12	11-12	20	19-20	28	27-28
5	4-5	13	12-13	21	20-21	29	28-29
6	5-6	14	13-14	22	2-22	30	29-30
7	6-7	15	14-15	23	22-23	31	30-31
8	7-8	16	15-16	24	23-24	32	31-32

表 A2 IEEE69 节点配电网支路编号

Table A2 IEEE69-bus distribution network branch number

编号	支路	编号	支路	编号	支路	编号	支路
1	69-1	16	15-16	31	30-31	46	3-35
2	1-2	17	16-17	32	31-32	47	35-36
3	2-3	18	17-18	33	32-33	48	36-37
4	3-4	19	18-19	34	33-34	49	37-38
5	4-5	20	19-20	35	2-58	50	7-39
6	5-6	21	20-21	36	58-59	51	39-40

续表 A2

编号	支路	编号	支路	编号	支路	编号	支路
7	6-7	22	21-22	37	59-60	52	8-41
8	7-8	23	22-23	38	60-61	53	41-42
9	8-9	24	23-24	39	61-62	54	42-43
10	9-10	25	24-25	40	62-63	55	43-44
11	10-11	26	25-26	41	63-64	56	44-45
12	11-12	27	2-27	42	64-65	57	45-46
13	12-13	28	27-28	43	65-66	58	46-47
14	13-14	29	28-29	44	66-67	59	47-48
15	14-15	30	29-30	45	67-68	60	48-49
						67	11-56
						68	56-57
						69	10-65
						70	12-19
						71	14-68
						72	26-53
						73	38-47
						—	—
						—	—

表 A3 直角坐标系下 IEEE33 节点配电网仿真结果误差

Table A3 Errors in the simulation results of the IEEE33-bus distribution network under the rectangular coordinate system

待求变量	切比雪夫仿射		泰勒展开仿射	
	最大误差/%	平均误差/%	最大误差/%	平均误差/%
电压幅值	0.0380	0.0226	0.0322	0.0197
电压相角	0.5760	0.3091	23.9599	9.5925
支路有功功率	5.1267	0.4597	4.7770	0.3653
支路无功功率	0.9763	0.1858	87.1729	5.9348

表 A4 极坐标系下 IEEE33 节点配电网仿真结果误差

Table A4 Errors in the simulation results of the IEEE33-bus distribution network under the polar coordinate system

待求变量	切比雪夫仿射		泰勒展开仿射	
	最大误差/%	平均误差/%	最大误差/%	平均误差/%
电压幅值	0.0372	0.0224	0.1399	0.0844
电压相角	0.7751	0.3673	45.4565	15.8185
支路有功功率	5.1498	0.5476	60.2038	3.6013
支路无功功率	0.9406	0.1435	222.4497	40.3936

表 A5 直角坐标系下 IEEE69 节点配电网仿真结果误差

Table A5 Errors in the simulation results of the IEEE69-bus distribution network under the rectangular coordinate system

待求变量	切比雪夫仿射		泰勒展开仿射	
	最大误差/%	平均误差/%	最大误差/%	平均误差/%
电压幅值	0.0622	0.0249	0.0563	0.0252
电压相角	3.6201	0.3566	69.2670	18.0282
支路有功功率	5.2367	1.9863	14.0699	1.9389
支路无功功率	4.7847	0.5690	163.6942	12.5831

表 A6 极坐标系下 IEEE69 节点配电网仿真结果误差

Table A6 Errors in the simulation results of the IEEE69-bus distribution network under the polar coordinate system

待求变量	切比雪夫仿射		泰勒展开仿射	
	最大误差/%	平均误差/%	最大误差/%	平均误差/%
电压幅值	0.0372	0.0224	0.1399	0.0844
电压相角	0.7751	0.3673	45.4565	15.8185
支路有功功率	6.0632	2.0632	62.6288	10.0953
支路无功功率	4.0851	0.5569	499.4377	63.8627

表 A7 不同算法的平均计算时间对比

Table A7 Comparison of the average computation time of different algorithms

算例	波动 区间	计算时间/s				
		蒙特卡洛	切比雪夫		泰勒展开	
			直角坐标系	极坐标系	直角坐标系	极坐标系
IEEE33	±10%	242.4537	1.3206	1.1279	1.3001	1.3762
	±20%	253.5333	1.3744	1.1424	1.4888	1.4252
	±30%	261.114	1.425	1.2787	1.5963	1.4859
	±40%	267.5012	1.5174	1.3089	1.6344	1.5834
	±50%	272.4616	1.9298	1.7493	2.1246	2.0589
IEEE69	±10%	242.4537	3.4285	1.562	3.5199	3.2834
	±20%	253.5333	3.5457	1.6862	3.612	3.7766
	±30%	261.114	3.6203	1.9257	3.6904	4.0369
	±40%	267.5012	3.7293	1.9877	3.8031	4.3563
	±50%	272.4616	3.9443	2.0075	4.5371	4.8346

表 A8 直角坐标系下不同阶数 k 的 IEEE33 节点配电网部分电压幅值仿真结果Table A8 Simulation results of the voltage amplitude of some nodes in the IEEE33-bus distribution network under the rectangular coordinate system with different orders of k

节点	$k = 2$		$k = 3$		$k = 4$	
	下界/p.u.	上界/p.u.	下界/p.u.	上界/p.u.	下界/p.u.	上界/p.u.
14	1.008 470 2	1.026 862 3	1.008 470 5	1.026 861 3	1.008 475 1	1.026 860 7
15	1.007 223 8	1.025 641 8	1.007 227 0	1.025 640 7	1.007 231 6	1.025 640 0
16	1.005 381 7	1.023 834 6	1.005 382 5	1.023 834 0	1.005 389 1	1.023 832 0
17	1.004 833 4	1.023 295 4	1.004 837 9	1.023 291 6	1.004 839 1	1.023 292 5

表 A9 直角坐标系下不同阶数 k 的 IEEE33 节点配电网部分电压相角仿真结果Table A9 Simulation results of the voltage phase angles of some nodes in the IEEE33-bus distribution network under the rectangular coordinate system with different orders of k

节点	$k = 2$		$k = 3$		$k = 4$	
	下界/(°)	上界/(°)	下界/(°)	上界/(°)	下界/(°)	上界/(°)
14	2.031 255 8	2.513 202 9	2.031 258 3	2.513 198 1	2.031 359 0	2.513 138 3
15	2.012 020 6	2.494 647 0	2.012 023 2	2.494 641 9	2.012 083 4	2.494 582 7
16	1.948 184 3	2.433 073 6	1.948 187 2	2.433 069 2	1.948 247 8	2.433 064 3
17	1.940 264 0	2.425 435 0	1.940 267 1	2.425 430 6	1.940 327 4	2.425 430 1

表 A10 直角坐标系下不同阶数 k 的 IEEE33 节点配电网部分支路有功功率仿真结果Table A10 Simulation results of the active power of some branches in the IEEE33-bus distribution network under the rectangular coordinate system with different orders of k

支路	$k = 2$		$k = 3$		$k = 4$	
	下界/p.u.	上界/p.u.	下界/p.u.	上界/p.u.	下界/p.u.	上界/p.u.
11	0.038 455 5	0.058 201 2	0.038 456 9	0.058 200 7	0.038 458 1	0.058 200 7
12	0.044 490 4	0.064 279 8	0.044 490 8	0.064 279 2	0.044 490 8	0.064 279 1
13	0.050 670 4	0.070 647 0	0.050 671 7	0.070 647 0	0.050 672 3	0.070 647 0
14	0.062 755 2	0.082 809 4	0.062 756 2	0.082 809 3	0.062 757 6	0.082 809 1

表 A11 直角坐标系下不同阶数 k 的 IEEE33 节点配电网部分支路无功功率仿真结果

Table A11 Simulation results of the reactive power of some branches in the IEEE33-bus distribution network under the rectangular coordinate system with different orders of k

支路	$k = 2$		$k = 3$		$k = 4$	
	下界/p.u.	上界/p.u.	下界/p.u.	上界/p.u.	下界/p.u.	上界/p.u.
11	-0.006 472 3	-0.002 725 3	-0.006 471 8	-0.002 725 6	-0.006 470 4	-0.002 725 6
12	-0.002 962 1	0.000 800 5	-0.002 962 1	0.000 801 7	-0.002 962 0	0.000 801 8
13	0.000 680 4	0.004 589 0	0.000 681 5	0.004 588 8	0.000 681 7	0.004 588 8
14	0.008 792 9	0.012 800 7	0.008 793 6	0.012 800 5	0.008 794 0	0.012 800 4

表 A12 极坐标系下不同阶数 k 的 IEEE33 节点配电网部分电压幅值仿真结果

Table A12 Simulation results of the voltage amplitude of some nodes in the IEEE33-bus distribution network under the polar coordinate system with different orders of k

节点	$k = 2$		$k = 3$		$k = 4$	
	下界/p.u.	上界/p.u.	下界/p.u.	上界/p.u.	下界/p.u.	上界/p.u.
14	1.008 469 0	1.026 850 1	1.008 469 2	1.026 850 0	1.008 469 3	1.026 850 0
15	1.007 226 1	1.025 629 6	1.007 226 8	1.025 629 3	1.007 226 9	1.025 629 1
16	1.005 383 8	1.023 820 3	1.005 383 4	1.023 820 7	1.005 383 9	1.023 820 5
17	1.004 832 4	1.023 279 2	1.004 832 6	1.023 279 1	1.004 832 8	1.023 279 1

表 A13 极坐标系下不同阶数 k 的 IEEE33 节点配电网部分电压相角仿真结果

Table A13 Simulation results of the voltage phase angles of some nodes in the IEEE33-bus distribution network under the polar coordinate system with different orders of k

节点	$k = 2$		$k = 3$		$k = 4$	
	下界/(°)	上界/(°)	下界/(°)	上界/(°)	下界/(°)	上界/(°)
14	2.031 481 7	2.516 295 6	2.031 481 9	2.516 294 7	2.031 482 8	2.516 291 7
15	2.012 246 9	2.497 744 7	2.012 247 6	2.497 743 2	2.012 247 6	2.497 742 6
16	1.948 409 4	2.436 213 1	1.948 410 2	2.436 205 4	1.948 410 7	2.436 204 3
17	1.940 489 7	2.428 572 6	1.940 490 1	2.428 570 9	1.940 471 1	2.428 570 5

表 A14 极坐标系下不同阶数 k 的 IEEE33 节点配电网部分支路有功功率仿真结果

Table A14 Simulation results of the active power of some branches in the IEEE33-bus distribution network under the polar coordinate system with different orders of k

支路	$k = 2$		$k = 3$		$k = 4$	
	下界/p.u.	上界/p.u.	下界/p.u.	上界/p.u.	下界/p.u.	上界/p.u.
11	0.038 446 5	0.058 216 2	0.038 447 4	0.058 215 3	0.038 447 6	0.058 215 1
12	0.044 465 1	0.064 319 3	0.044 465 7	0.064 319 3	0.044 466 1	0.064 319 2
13	0.050 629 6	0.070 715 4	0.050 630 2	0.070 715 3	0.050 630 9	0.070 715 3
14	0.062 728 6	0.082 855 8	0.062 729 0	0.082 855 4	0.062 729 2	0.082 855 4

表 A15 极坐标系下不同阶数 k 的 IEEE33 节点配电网部分支路无功功率仿真结果

Table A15 Simulation results of the reactive power of some branches in the IEEE33-bus distribution network under the polar coordinate system with different orders of k

支路	$k = 2$		$k = 3$		$k = 4$	
	下界/p.u.	上界/p.u.	下界/p.u.	上界/p.u.	下界/p.u.	上界/p.u.
11	-0.006 444 1	-0.002 776 2	-0.006 444 0	-0.002 776 2	-0.006 444 0	-0.002 776 3
12	-0.002 941 1	0.000 731 7	-0.002 940 7	0.000 733 7	-0.002 940 4	0.000 734 2
13	0.000 696 4	0.004 523 8	0.000 696 4	0.004 523 3	0.000 696 6	0.004 520 8
14	0.008 809 5	0.012 735 1	0.008 810 2	0.012 734 9	0.008 810 4	0.012 734 7

参考文献

- [1] 廖小兵, 张敏, 乐健, 等. 考虑循环寿命折损的主动配电网仿射可调鲁棒优化方法[J]. 电力系统保护与控制, 2023, 51(8): 37-49.
LIAO Xiaobing, ZHANG Min, LE Jian, et al. Affinely adjustable robust optimal operation strategy for an active distribution network considering cycle life loss[J]. Power System Protection and Control, 2023, 51(8): 37-49.
- [2] XU D, XU J, QIAN C, et al. A pseudo-measurement modelling strategy for active distribution networks considering uncertainty of DGs[J]. Protection and Control of Modern Power Systems, 2024, 9(5): 1-15.
- [3] 高雪寒, 高源, 赵健, 等. 基于数据潮流模型的高比例光伏配电网三相不平衡优化[J]. 电力系统保护与控制, 2024, 52(8): 77-87.
GAO Xuehan, GAO Yuan, ZHAO Jian, et al. Three-phase unbalanced optimization of a distribution network with a high proportion of distributed photovoltaic energy based on a data-driven power flow model[J]. Power System Protection and Control, 2024, 52(8): 77-87.
- [4] WANG C, LIU D, TANG F, et al. A clustering-based analytical method for hybrid probabilistic and interval power flow[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2020, 126.
- [5] 成龙, 李国庆, 王翀, 等. 考虑预测误差不确定性和功率互济的配电网直流合环重构[J]. 电力系统保护与控制, 2024, 52(24): 97-108.
CHENG Long, LI Guoqing, WANG Chong, et al. DC loop-closed reconfiguration for distribution networks considering prediction error uncertainty and power complementarity[J]. Power System Protection and Control, 2024, 52(24): 97-108.
- [6] 王晨旭, 唐飞, 刘涤尘, 等. 基于双层代理模型的概率-区间潮流计算及灵敏度分析[J]. 电工技术学报, 2022, 37(5): 1181-1193.
WANG Chenxu, TANG Fei, LIU Dichen, et al. Probabilistic-interval power flow and sensitivity analysis using double layer surrogate method[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2022, 37(5): 1181-1193.
- [7] YANG G, DONG P, LIU M, et al. Research on random fuzzy power flow calculation of AC/DC hybrid distribution network based on unified iterative method[J]. IET Renewable Power Generation, 2021, 15: 731-745.
- [8] 廖小兵, 张一鸣, 李自成, 等. 考虑分布式风电出力相关性的配电网概率区间潮流计算方法[J/OL]. 电力自动化设备: 1-22[2024-12-20]. <https://doi.org/10.16081/j.epae.202410008>
LIAO Xiaobing, ZHANG Yiming, LI Zicheng, et al. Probability interval power flow calculation method for distribution network considering correlation of distributed wind power output[J/OL]. Electric Power Automation Equipment: 1-22[2024-12-20]. <https://doi.org/10.16081/j.epae.202410008>
- [9] 徐艳春, 李思佳, 汪平, 等. 考虑分布式电源时空相关及电动汽车充电负荷分布特性的有源配电网概率潮流[J]. 电网技术, 2024, 48(6): 2550-2563.
XU Yanchun, LI Sijia, WANG Ping, et al. Probabilistic load flow of active distribution network considering spatial-temporal correlation of distribution generation and distribution characteristics of electric vehicle charging load[J]. Power System Technology, 2024, 48(6): 2550-2563.
- [10] ZHANG J, XIONG G, MENG K, et al. An improved probabilistic load flow simulation method considering correlated stochastic variables[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2019, 111: 260-268.
- [11] 曹宏宇, 梁言贺, 刘惠颖, 等. 考虑风-光-储不确定性的新型电力系统概率潮流计算[J]. 电测与仪表, 2024, 61(6): 87-93.
CAO Hongyu, LIANG Yanhe, LIU Huiying, et al. Probabilistic power flow calculation of novel power system considering uncertainty of wind-light-storage[J]. Electrical Measurement & Instrumentation, 2024, 61(6): 87-93.
- [12] 王正宇, 朱林, 黄师禹, 等. 基于高斯函数-最大熵展开的风电并网系统概率潮流计算[J]. 电力系统保护与控制, 2023, 51(20): 91-98.
WANG Zhengyu, ZHU Lin, HUANG Shiyu, et al. Probabilistic load flow calculation based on Gaussian function-maximum entropy expansion for a wind power integration system[J]. Power System Protection and Control, 2023, 51(20): 91-98.
- [13] 廖小兵, 刘开培, 乐健, 等. 电力系统区间潮流计算方法综述[J]. 中国电机工程学报, 2019, 39(2): 447-458, 642.
LIAO Xiaobing, LIU Kaipei, LE Jian, et al. Review on interval power flow calculation methods in power system[J]. Proceedings of the CSEE, 2019, 39(2): 447-458, 642.
- [14] ZHANG C, CHEN H, NGAN H. A mixed interval power flow analysis under rectangular and polar coordinate system[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2017, 32(2): 1422-1429.
- [15] 黄耿业, 邵振国, 黄圆皓, 等. 仿射型区间潮流算法应用与展望[J]. 电网技术, 2021, 45(7): 2675-2682.
HUANG Gengye, SHAO Zhenguo, HUANG Yuanhao, et al. Application and prospect of interval power flow

- algorithm based on affine arithmetic[J]. *Power System Technology*, 2021, 45(7): 2675-2682.
- [16] 景巍巍, 王强, 程好, 等. 电热综合能源系统稳态与区间潮流计算快速解耦新方法[J]. *中国电力*, 2024, 57(7): 203-213.
JING Weiwei, WANG Qiang, CHENG Hao, et al. New rapid decoupling methods for calculating steady-state and interval power flow of integrated electricity-heat energy systems[J]. *Electric Power*, 2024, 57(7): 203-213.
- [17] VACCARO A, CANIZARES C A, VILLACCI D. An affine arithmetic-based methodology for reliable power flow analysis in the presence of data uncertainty[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2010, 25(2): 624-632.
- [18] 丁涛, 崔翰韬, 顾伟, 等. 基于区间和仿射运算的不确定潮流算法[J]. *电力系统自动化*, 2012, 36(13): 51-55, 115.
DING Tao, CUI Hantao, GU Wei, et al. An uncertainty power flow algorithm based on interval and affine arithmetic[J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2012, 36(13): 51-55, 115.
- [19] 廖小兵, 刘开培, 张亚超, 等. 基于区间泰勒展开的不确定性潮流分析[J]. *电工技术学报*, 2018, 33(4): 750-758.
LIAO Xiaobing, LIU Kaipei, ZHANG Yachao, et al. Uncertain power flow analysis based on interval Taylor expansion[J]. *Transactions of China Electrotechnical Society*, 2018, 33(4): 750-758.
- [20] 廖小兵, 刘开培, 李彧野, 等. 基于混合潮流方程的区间潮流计算方法[J]. *高电压技术*, 2018, 44(10): 3417-3424.
LIAO Xiaobing, LIU Kaipei, LI Yuye, et al. Interval power flow calculation method based on mixed power flow equations[J]. *High Voltage Engineering*, 2018, 44(10): 3417-3424.
- [21] 邵振国, 黄耿业, 张嫣, 等. 固定噪声元的预测-校正型仿射潮流迭代算法[J]. *中国电机工程学报*, 2021, 41(7): 2331-2341.
SHAO Zhenguo, HUANG Gengye, ZHANG Yan, et al. A predictor-corrector affine power flow iteration algorithm based on fixed noise element[J]. *Proceedings of the CSEE*, 2021, 41(7): 2331-2341.
- [22] LENG Shipeng, LIU Kaipei, RAN Xiaohong, et al. An affine arithmetic-based model of interval power flow with the correlated uncertainties in distribution system[J]. *IEEE Access*, 2020, 8: 60293-60304.
- [23] 李响, 张丹, 李秋燕, 等. 计及随机性的多分布式电源接入中压配电网承载能力评估[J]. *电力系统保护与控制*, 2024, 52(17): 150-160.
LI Xiang, ZHANG Dan, LI Qiuyan, et al. Hosting capacity evaluation of distributed generators accessing a medium voltage distribution network considering randomness[J]. *Power System Protection and Control*, 2024, 52(17): 150-160.
- [24] LI S, MIN R, ZHANG J, et al. A digital signature scheme based on general Chebyshev polynomial[J]. *Journal of Supercomputing*, 2025, 81.
- [25] WU J, LUO Z, ZHANG Y, et al. Interval uncertain method for multibody mechanical systems using Chebyshev inclusion functions[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2013, 95(7): 608-630.
- [26] JIANG C, HAN X, LU G, et al. Correlation analysis of non-probabilistic convex model and corresponding structural reliability technique[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200: 2528-2546.
- [27] PREDRAG M, VIDOVIĆ, ANDRIJA T, et al. A novel correlated intervals-based algorithm for distribution power flow calculation[J]. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 2017, 90: 245-255.
- [28] JIANG C, FU C, NI B, et al. Interval arithmetic operations for uncertainty analysis with correlated interval variables[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2016, 32(4): 743-752.
- [29] LIAO X, ZHANG Y, LI Z, et al. Probabilistic interval power flow calculation method for distribution networks considering the correlation of distributed wind power output[J]. *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, 2024, 157.

收稿日期: 2025-02-09; 修回日期: 2025-04-20

作者简介:

廖小兵(1989—), 男, 通信作者, 博士, 副教授, 研究方向为电力系统不确定性分析, 配电系统运行与规划, 储能规划等; E-mail: lxbwhu@126.com

魏寒琪(2001—), 女, 硕士研究生, 研究方向为配电网不确定性潮流计算;

李自成(1977—), 男, 教授, 硕士生导师, 研究方向为控制理论及应用、电力电子与电力传动。

(编辑 魏小丽)