

DOI: 10.19783/j.cnki.pspc.201571

变时滞影响下广域电力系统的 H_∞ 控制

汪豪¹, 钱伟¹, 郭建峰¹, 费树岷²

(1. 河南理工大学电气工程与自动化学院, 河南 焦作 454000; 2. 东南大学自动化学院, 江苏 南京 210096)

摘要: 针对大规模互联电力系统中时滞和干扰现象对系统运行造成的影响, 研究了变时滞影响下广域电力系统 H_∞ 控制问题。首先, 构造新的增广向量和包含更多时滞信息的 Lyapunov-Krasovskii 泛函。然后, 利用 Wirtinger 积分不等式、基于辅助函数的二重积分不等式和凸组合等方法对求导后的泛函进行估计, 得到了具有较小保守性的稳定性结论。在此基础上, 设计了无记忆的 H_∞ 状态反馈控制器。并提出一种分步线性化的方法, 将 H_∞ 控制器存在性条件转化为严格线性矩阵不等式的形式。最后通过仿真验证了该方法可以扩大系统的稳定运行区域, 控制器具有良好的控制效果。

关键词: 广域电力系统; H_∞ 控制; 变时滞; 干扰; 积分不等式

H_∞ control for a wide-area power system with time-varying delay

WANG Hao¹, QIAN Wei¹, GUO Jianfeng¹, FEI Shumin²

(1. School of Electrical Engineering and Automation, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454000, China;

2. School of Automation, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: We consider the effects of time delay and disturbances on the stable operation of large-scale interconnected power systems, and the H_∞ control problem of wide-area power systems is investigated. First, a new augmented vector and Lyapunov-Krasovskii function with more delay information are constructed. Then, the Wirtinger integral inequality, double integral inequality via auxiliary function and a convex combination approach are used to estimate the derivative of the function and a less conservative stability criterion is obtained. A memoryless H_∞ state feedback controller is designed, and by introducing a novel staged linearization method, the existing condition of the H_∞ controller is obtained in terms of linear matrix inequality. Finally, numerical simulations are given to illustrate that the proposed methods improve the stable operation region of the power systems, and the designed controller has good control performance.

This work is supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 61973105).

Key words: wide-area power systems; H_∞ control; time-varying delay; disturbances; integral inequality

0 引言

随着基于相量测量^[1]单元(Phasor Measurement Unit, PMU)的广域测量技术(Wide Area Measurement System, WAMS)在电力系统中的广泛应用, 推动了电力系统分布式同步测量和协调控制的发展^[2-3]。在广域环境下, 电力系统中测量和控制信号在实现远

距离传输和控制过程中会产生通信时滞, 经研究表明, 即使是非常小的时滞, 在某些条件下都会使控制器达不到理想的控制效果, 甚至破坏电力系统的稳定。同时, 在实际的电力系统中不可避免地存在着各种各样的不确定性因素和干扰, 而 H_∞ 控制的目的就是使系统对外界干扰具有很强的鲁棒性, 充分减弱外界干扰对系统输出的影响^[4-6]。因此, 研究时滞影响下电力系统 H_∞ 控制对系统的稳定运行具有重要意义。

时滞电力系统的 H_∞ 控制建立在稳定性结论的基础上, 如何降低结论的保守性是国内外学者努力的方向, 为此广大学者提出了不同的研究方法。文

基金项目: 国家自然科学基金项目资助(61973105); 河南省创新型科技团队(CXTD2016054); 中原高水平人才专项支持计划(ZYQR201912031); 河南省高校科技创新团队(2018RTSHN019); 河南省高校基本科研业务费专项资金资助(NSFRF170501)

献[7]通过构造增广型 L-K 泛函、文献[8]利用 Jensen 不等式, 研究了时滞系统的稳定性问题。文献[9-10]利用引入自由权矩阵的方法得到电力系统的稳定性判据, 但自由变量的引入加大了计算的复杂度。进一步地, 文献[11]采用 Wirtinger 积分不等式得到系统的改进稳定判据。在时滞电力系统 H_∞ 控制器设计方面, 文献[12]考虑到激励器和电力系统稳定器的时滞, 研究了多时滞电力系统的 H_∞ 控制器设计问题。文献[13]设计了时滞多区域电力系统的鲁棒 H_∞ 负载频率控制器。文献[14]针对直流微电网中参数不确定和时滞问题, 提出了 H_∞ 控制器的设计方法。文献[15]利用 Pade 近似多项式逼近时滞环节, 建立了时滞电力系统区间振荡广域控制模型, 采用 H_∞ 鲁棒控制的混合灵敏度方法进行阻尼控制器设计, 相比传统的利用 Pade 近似法处理时滞具有更低的保守性。尽管上述文献从一定程度上降低了结论的保守性, 但在泛函构造和对泛函导数估计采用的方法上仍有很大的提升空间。

基于以上分析, 本文研究变时滞影响下电力系统的 H_∞ 控制问题。首先, 为了利用更多的时滞信息, 提出新的增广向量并构造一种新型 L-K 泛函。然后, 利用时滞分割方法对积分区间进行时滞分割, 并利用 Wirtinger 积分不等式、基于辅助函数的二重积分不等式、Relaxed 积分不等式和凸组合方法对泛函导数进行估计, 以进一步降低结论的保守性。接下来提出了一种分步线性化方法对非线性项进行处理, 得到基于严格线性矩阵不等式的 H_∞ 控制器设计条件。最后, 通过仿真分析说明本文方法有效地降低了结论的保守性, 设计的控制器具有良好的控制效果。

1 时滞电力系统模型

电力系统中的发电机动态模型可以用以下三阶微分方程表示:

$$\begin{cases} \frac{d\delta}{dt} = \omega - \omega_0 \\ T_j \frac{d\omega}{dt} = (p_m - p_e)\omega_0 - D(\omega - \omega_0) \\ T_d' \frac{dE_q'}{dt} = E_f - E_q' - (X_d - X_d')I_d \\ U_d = X_q I_q, U_q = E_q' - X_d' I_d \end{cases} \quad (1)$$

其中,

$$I_d = \frac{E_q' - V \cos \delta}{X_d' + X_e} = \frac{E_Q - V \cos \delta}{X_d' + X_e}, \quad p_e = \frac{E_Q V}{X_q + X_e} \sin \delta$$

$$V_g = \sqrt{\left(\frac{X_q V \sin \delta}{X_q + X_e}\right)^2 + \left(\frac{X_e E_q' + X_d' V \cos \delta}{X_d' + X_e}\right)^2}$$

式中: δ 和 ω 分别为发电机转子的功角和角速度; ω_0 为初始角速度稳态值; P_e 和 P_m 分别为电磁功率和机械功率; T_j 为惯性时间常数; E_q' 为 q 轴暂态电势; D 为阻尼系数; X_d' 和 X_d 分别为 d 轴暂态、同步电抗; T_d' 为 d 轴暂态时间常数; I_d 为 d 轴电流; X_q 为 q 轴同步电抗; X_e 为线路电抗; V 为无穷大母线系数; E_Q 为假想电动势。

采用励磁控制(Auto Voltage Regulator, AVR)来保证时滞电力系统的可靠性, 其动态方程表示为

$$T_a \frac{dE_f}{dt} = -K_a [V_g(t - \tau(t)) - V_{g_0}] - (E_f - E_{f_0}) \quad (2)$$

式中: T_a 和 K_a 为放大环节励磁系统的时间常数和增益; E_f 为励磁电势; E_{f_0} 为励磁电势参考值; V_g 为励磁系统端电压; V_{g_0} 为机端电压参考值, 其他变量代表的含义见文献[16]。

由式(1)、式(2)得到时滞电力系统的状态空间模型。

$$\begin{cases} \frac{d\delta}{dt} = \omega - \omega_0 \\ \frac{d\omega}{dt} = (p_m - p_e) \frac{\omega_0}{T_j} - \frac{D}{T_j} (\omega - \omega_0) \\ \frac{dE_q'}{dt} = \frac{E_f - E_q'}{T_d'} - (X_d - X_d') \frac{I_d}{T_d'} \\ \frac{dE_f}{dt} = -\frac{K_a}{T_a} [V_g(t - \tau(t)) - V_{g_0}] - \frac{1}{T_a} (E_f - E_{f_0}) \end{cases} \quad (3)$$

对式(3)在平衡点线性化得到变时滞电力系统的状态空间模型。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_d \mathbf{x}(t - d(t)) \\ \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t), t \in [-h_2, 0] \end{cases} \quad (4)$$

式中: $\mathbf{x}(t) = [\Delta\delta \quad \Delta\omega \quad \Delta E_q' \quad \Delta E_f]^T \in \mathbf{R}^n$ 是状态向量; $\boldsymbol{\phi}(t)$ 为 $[-h_2, 0]$ 上连续的初始向量函数; \mathbf{A} 、 \mathbf{A}_d 为系统矩阵。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \omega & 0 & 0 \\ -\frac{K_1}{M} & -\frac{D}{M} & -\frac{K_2}{M} & 0 \\ -\frac{K_3}{T_d'} & 0 & -\frac{K_1}{T_d'} & \frac{1}{T_d'} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_a} \end{bmatrix}$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K_5 K_a}{T_a} & 0 & -\frac{K_6 K_a}{T_a} & 0 \end{bmatrix}$$

其中, $K_i (i=1,2,\dots,6)$ 变量代表的含义如下:

$$K_1 = \frac{E'_q V \cos \delta}{X'_d + X_e}, K_2 = \frac{V \sin \delta}{X'_d + X_e},$$

$$K_3 = \frac{(X_d - X'_d) V \sin \delta}{X'_d + X_e}, K_4 = \frac{X_d + X_e}{X'_d + X_e},$$

$$K_5 = \frac{-X'_d X_e E'_q \sin \delta}{(X'_d + X_e) \sqrt{(X_q V \sin \delta)^2 + (X_e E'_q + X'_d V \cos \delta)^2}},$$

$$K_6 = \frac{X'_d X_e E'_q \cos \delta + X_e^2 E'_q}{(X'_d + X_e) \sqrt{(X_q V \sin \delta)^2 + (X_e E'_q + X'_d V \cos \delta)^2}}.$$

区间变时滞 $d(t)$ 满足:

$$0 \leq h_1 \leq d(t) \leq h_2, \quad |\dot{d}(t)| \leq \mu \quad (5)$$

式中: $h_2 > h_1 \geq 0$; $\mu < 1$ 为常数。

在实际电力系统中, 引入状态反馈且考虑到外部扰动时变时滞电力系统状态空间模型如下。

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d(t)) + B_0 u(t) + B \omega(t) \\ z(t) = Cx(t) + C_d x(t-d(t)) + D \omega(t) \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h_2, 0] \end{cases} \quad (6)$$

式中: $\omega(t) \in R^p$ 为干扰输入量; $z(t) \in R^l$ 为控制输出; $u(t)$ 为状态反馈控制器; B_0 、 B 、 C 、 C_d 、 D 为适当维数的常数矩阵。

采用以下定义和引理获得主要结论。

定义 1: 对于给定标量 $\gamma > 0$, 如果 $\omega(t) = 0$ 时, 系统(6)是渐近稳定的; 从外部扰动 $\omega(t)$ 到控制输出 $z(t)$ 的 H_∞ 范数不超过给定常数 γ , 即在零初始条件 $x(t) = 0$ 下 $\|z(t)\|_2^2 < \gamma^2 \|\omega(t)\|_2^2$, $\forall \omega(t) \in L_2[0, \infty)$, 则称系统(6)渐近稳定且具有 H_∞ 性能指标 γ 。

引理 1^[17]: 对任意的实对称矩阵 $R \geq 0$ 和标量 a, b , 且 $a > b$ 及相量值函数 $\omega: [b, a] \rightarrow R^n$, 则有下述矩阵不等式成立。

$$\int_b^a \dot{\omega}(s)^T R \dot{\omega}(s) ds \geq \frac{1}{a-b} \Phi_1^T R \Phi_1 + \frac{3}{a-b} \Phi_2^T R \Phi_2$$

$$\int_b^a \omega(s)^T R \omega(s) ds \geq \frac{1}{a-b} \Phi_3^T R \Phi_3 + \frac{3}{a-b} \Phi_4^T R \Phi_4$$

其中,

$$\Phi_1 = \int_b^a \dot{\omega}(s) ds, \Phi_2 = \omega(a) + \omega(b) - \frac{2}{a-b} \int_b^a \omega(s) ds$$

$$\Phi_3 = \int_b^a \omega(s) ds, \Phi_4 = \int_b^a \omega(s) ds - \frac{2}{a-b} \int_b^a \int_\theta^a \omega(s) ds d\theta$$

引理 2^[18]: 存在任意正整数 m, n , 变量 $\alpha \in (0, 1)$, $R^{n \times n} > 0$, 矩阵 $w_1^{n \times m}$ 、 $w_2^{m \times n}$ 对于 $\Gamma(a, b) = \frac{1}{a} \zeta^T w_1^T R w_1 \zeta + \frac{1}{1-a} \zeta^T w_2^T R w_2 \zeta$, 若存在 n 阶矩阵 X , 且满足 $\begin{bmatrix} R & X \\ * & R \end{bmatrix} > 0$, 则下式成立。

$$\min_{\alpha \in (0, 1)} \Gamma(\alpha, \beta) \geq \begin{bmatrix} w_1 \zeta \\ w_2 \zeta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & X \\ * & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \zeta \\ w_2 \zeta \end{bmatrix}$$

引理 3^[19]: 对于任意正定矩阵 $R \in R^{n \times n}$, 标量 a, b 满足 $a > b$ 且向量值函数 $x \in [a, b] \rightarrow R^n$, 使下面的不等式成立。

$$\int_a^b \int_\theta^b \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds d\theta \geq 2\Omega_1^T R \Omega_1 + 4\Omega_2^T R \Omega_2$$

$$\int_a^b \int_a^\theta \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds d\theta \geq 2\Omega_3^T R \Omega_3 + 4\Omega_4^T R \Omega_4$$

其中,

$$\Omega_1 = x(b) - \frac{1}{b-a} \int_a^b x(s) ds,$$

$$\Omega_2 = x(b) + \frac{2}{b-a} \int_a^b x(s) ds - \frac{6}{(b-a)^2} \int_a^b \int_\theta^b x(s) ds d\theta,$$

$$\Omega_3 = x(a) - \frac{1}{b-a} \int_a^b x(s) ds,$$

$$\Omega_4 = x(a) - \frac{4}{b-a} \int_a^b x(s) ds + \frac{6}{(b-a)^2} \int_a^b \int_\theta^b x(s) ds d\theta$$

引理 4^[19]: x 为相量值函数, 满足 $x: [0, h] \rightarrow R^n$, 对于时变时滞 $d(t) \in [0, h]$, 存在具有合适维数的对称矩阵 $R > 0$, 以及任意矩阵 S_1 满足 $\begin{bmatrix} R_1 & S_1 \\ * & R_1 \end{bmatrix} \geq 0$,

其中 $R_1 = \text{diag}\{R, 3R\}$, 使得下述不等式成立。

$$-\int_{t-d(t)}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds - \int_{t-h}^{t-d(t)} \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \leq$$

$$-\frac{1}{h} \zeta_1^T(t) \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_1 & S_1 \\ * & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \zeta_1(t)$$

其中,

$$\zeta_1(t) = [x^T(t), x^T(t-d(t)), x^T(t-h), v_1^T(t), v_2^T(t)]^T,$$

$$v_1^T(t) = \frac{1}{d(t)} \int_{t-d(t)}^t x(s) ds, v_2^T(t) = \frac{1}{h-d(t)} \int_{t-h}^{t-d(t)} x(s) ds,$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} e_1 - e_2 \\ e_1 + e_2 - 2e_4 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} e_2 - e_3 \\ e_2 + e_3 - 2e_5 \end{bmatrix},$$

$$e_i = \begin{bmatrix} 0_{n \times (i-1)n} & \mathbf{I} & 0_{n \times (5-i)n} \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, 5$$

2 变时滞电力系统稳定性和 H_∞ 性能分析

本节通过构造新型 Lyapunov 泛函, 并应用具有较小保守性的泛函导数估计方式, 研究时滞电力系统的稳定性和 H_∞ 性能。

对系统(6)构造如下 L-K 泛函。

$$V(t) = \sum_{i=1}^5 V_i(t) \quad (7)$$

式中:

$$V_1(t) = \eta^T(t) \mathbf{P} \eta(t);$$

$$V_2(t) = \int_{t-d(t)}^t \frac{1}{d(t)} x^T(s) \mathbf{Q} \frac{1}{d(t)} x(s) ds;$$

$$V_3(t) = \int_{t-h_1}^t x^T(s) \mathbf{R}_1 x(s) ds + \int_{t-h_2}^t x^T(s) \mathbf{R}_2 x(s) ds + \int_{t-d(t)}^t [s-t+d(t)] x^T(s) \mathbf{R}_3 x(s) ds;$$

$$V_4(t) = \int_{-h_2}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) \mathbf{S}_1 \dot{x}(s) ds d\theta + \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) \mathbf{S}_2 \dot{x}(s) ds d\theta +$$

$$\int_{-h_2}^0 \int_{t+\theta}^t x^T(s) \mathbf{S}_3 x(s) ds d\theta$$

$$V_5(t) = \int_{-h_1}^0 \int_{\theta}^0 \int_{t+\lambda}^t \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_1 \dot{x}(s) ds d\lambda d\theta + \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{\theta}^{-h_1} \int_{t+\lambda}^t \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_2 \dot{x}(s) ds d\lambda d\theta + \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{-h_2}^{\theta} \int_{t+\lambda}^t \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_3 \dot{x}(s) ds d\lambda d\theta$$

其中,

$$\eta(t) = \begin{bmatrix} x(t) & \int_{t-d(t)}^t x(s) ds \\ \leftarrow & \int_{t-d(t)}^{t-h_1} x(s) ds & \int_{t-h_2}^{t-d(t)} x(s) ds \end{bmatrix}$$

注 1: 构造合适的 Lyapunov 泛函可以有效地降低系统的保守性。本文在 $V_1(t)$ 中引入增广向量 $\int_{t-d(t)}^t x(s) ds$ 、 $\int_{t-d(t)}^{t-h_1} x(s) ds$ 和 $\int_{t-h_2}^{t-d(t)} x(s) ds$, 在 $V_2(t)$ 和 $V_3(t)$ 中分别构造新的积分项 $\int_{t-d(t)}^t (x^T(s)/d(t)) \mathbf{Q} (x(s)/d(t)) ds$ 和 $\int_{t-d(t)}^t [s-t+d(t)] x^T(s) \mathbf{R}_3 x(s) ds$, 充分考虑了变时滞 $d(t)$ 的信息, 对降低结论的保守性起到至关重要的作用。

设 e_i 为 $e_i = \begin{bmatrix} 0_{n \times (i-1)n} & \mathbf{I} & 0_{n \times (14-i)n} \end{bmatrix}$ 的分块坐标矩阵, 其中 $i=1, 2, \dots, 14$, \mathbf{I} 为单位矩阵。保证系统渐近稳定且具有 H_∞ 性能指标 γ 的定理如下。

定理 1: 对于给定标量 $0 \leq h_1 \leq h_2$, $\mu, \gamma > 0$, 若存

在正定矩阵 $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{4n \times 4n}$, $\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{R}_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{S}_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{T}_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 及适当维数的自由矩阵 $\mathbf{X}, \mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{Y}_i \in \mathbf{R}^{n \times n} (i=1, 2, 3)$, 在 $\forall d(t) \in \{h_1, h_2\}$, $\dot{d}(t) \in \{-\mu, \mu\}$, 有以下线性矩阵不等式成立, 则系统(6)渐近稳定, 且具有 H_∞ 性能指标 γ 。

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} + \boldsymbol{\varphi}_{11} & \mathbf{Y} \\ * & \mathbf{D}^T \mathbf{D} - \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

$$\mathbf{S}_3 + (1 - \dot{d}(t)) \mathbf{R}_3 + \frac{2\dot{d}(t)}{(d(t))^3} \mathbf{Q} > 0 \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_1 & \mathbf{X} \\ * & \tilde{\mathbf{S}}_1 \end{bmatrix} > 0, \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_2 & \mathbf{N} \\ * & \tilde{\mathbf{S}}_2 \end{bmatrix} > 0, \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}_2 & \mathbf{M} \\ * & \tilde{\mathbf{T}}_3 \end{bmatrix} > 0 \quad (10)$$

式中:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \boldsymbol{\varphi}_{10}; \quad \mathbf{P}_1 = \text{sym}\{\Pi_1^T \mathbf{P} \Pi_2\};$$

$$\mathbf{P}_2 = e_1^T \boldsymbol{\varphi}_9 e_1 - e_2^T \boldsymbol{\varphi}_2 e_2 - e_3^T \mathbf{R}_1 e_3 - e_4^T \mathbf{R}_2 e_4 + e_5^T \boldsymbol{\varphi}_3 e_5 - e_6^T (d(t)) \boldsymbol{\varphi}_4 e_6 - e_8^T (h_2 - d(t)) \mathbf{S}_3 e_8 - \boldsymbol{\varphi}_5 - \boldsymbol{\varphi}_6 - \Pi_3^T (3d(t)) \boldsymbol{\varphi}_4 \Pi_3 - \Pi_4^T (3(h_2 - d(t))) \mathbf{S}_3 \Pi_4$$

$$\mathbf{P}_3 = e_5^T \boldsymbol{\varphi}_7 e_5 - \boldsymbol{\varphi}_8 - \boldsymbol{\Theta}_1 - \boldsymbol{\Theta}_2 - \boldsymbol{\Theta}_3 - \boldsymbol{\Theta}_4 - \boldsymbol{\Theta}_5;$$

$$\boldsymbol{\Theta}_1 = 2\Pi_9^T \mathbf{T}_1 \Pi_9 + 4\Pi_{10}^T \mathbf{T}_1 \Pi_{10}, \quad \boldsymbol{\Theta}_2 = 2\Pi_{11}^T \mathbf{T}_2 \Pi_{11} + 4\Pi_{12}^T \mathbf{T}_2 \Pi_{12};$$

$$\boldsymbol{\Theta}_3 = 2\Pi_{13}^T \mathbf{T}_2 \Pi_{13} + 4\Pi_{14}^T \mathbf{T}_2 \Pi_{14}, \quad \boldsymbol{\Theta}_4 = 2\Pi_{15}^T \mathbf{T}_3 \Pi_{15} + 4\Pi_{16}^T \mathbf{T}_3 \Pi_{16};$$

$$\boldsymbol{\Theta}_5 = 2\Pi_{17}^T \mathbf{T}_3 \Pi_{17} + 4\Pi_{18}^T \mathbf{T}_3 \Pi_{18}, \quad \boldsymbol{\varphi}_1 = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + d(t) \mathbf{R}_3;$$

$$\boldsymbol{\varphi}_2 = \frac{1 - \dot{d}(t)}{(d(t))^2} \mathbf{Q}, \quad \boldsymbol{\varphi}_3 = h_2 \mathbf{S}_1 + (h_2 - h_1) \mathbf{S}_2;$$

$$\boldsymbol{\varphi}_4 = \mathbf{S}_3 + (1 - \dot{d}(t)) \mathbf{R}_3 + \frac{2\dot{d}(t)}{(d(t))^3} \mathbf{Q};$$

$$\boldsymbol{\varphi}_5 = \frac{1}{h_2} \begin{bmatrix} \Pi_5 \\ \Pi_6 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_1 & \mathbf{X} \\ * & \tilde{\mathbf{S}}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_5 \\ \Pi_6 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\varphi}_6 = \frac{1}{h_2 - h_1} \begin{bmatrix} \Pi_7 \\ \Pi_8 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_2 & \mathbf{N} \\ * & \tilde{\mathbf{S}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_7 \\ \Pi_8 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\varphi}_7 = \frac{h_1^2}{2} \mathbf{T}_1 + \frac{(h_2 - h_1)^2}{2} \mathbf{T}_2 + \frac{(h_2 - h_1)^2}{2} \mathbf{T}_3;$$

$$\boldsymbol{\varphi}_8 = \begin{bmatrix} \Pi_{19} \\ \Pi_{20} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha \tilde{\mathbf{T}}_2 & \mathbf{M} \\ * & (1 - \alpha) \tilde{\mathbf{T}}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{19} \\ \Pi_{20} \end{bmatrix}, \quad \alpha = \frac{h_2 - d(t)}{h_2 - h_1};$$

$$\boldsymbol{\varphi}_9 = \boldsymbol{\varphi}_1 + h_2 \mathbf{S}_3 + \frac{\mathbf{Q}}{(d(t))^2};$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{10} = e_1^T (\mathbf{Y}_1 \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{Y}_1^T) e_1 + e_1^T (\mathbf{Y}_1 \mathbf{A}_d + \mathbf{A}^T \mathbf{Y}_2^T) e_2 + e_2^T (\mathbf{Y}_2 \mathbf{A}_d + \mathbf{A}^T \mathbf{Y}_2^T) e_2 + e_5^T (-\mathbf{Y}_3 - \mathbf{Y}_3^T) e_5 +$$

$$e_1^T (-\mathbf{Y}_1 + \mathbf{A}^T \mathbf{Y}_3^T) e_5 + e_2^T (-\mathbf{Y}_2 + \mathbf{A}^T \mathbf{Y}_3^T) e_5$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{11} = e_1^T (\mathbf{C}^T \mathbf{C}) e_1 + e_2^T (\mathbf{C}_d^T \mathbf{C}_d) e_2 + e_1^T (\mathbf{C}^T \mathbf{C}_d) e_2;$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_1 = \text{diag}\{\mathbf{S}_1, 3\mathbf{S}_1\}; \quad \tilde{\mathbf{S}}_2 = \text{diag}\{\mathbf{S}_2, 3\mathbf{S}_2\};$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_2 &= \text{diag}\{T_2, 3T_2\}; \quad \tilde{T}_3 = \text{diag}\{T_3, 3T_3\}; \\ Y &= [\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad 0 \quad 0 \quad \Delta_3 \quad 0 \quad 0]^T, \\ \Delta_1 &= D^T C + B^T Y_1^T, \Delta_2 = D^T C_d + B^T Y_2^T, \Delta_3 = B^T Y_3^T. \end{aligned}$$

其中, $\text{sym}\{\Pi_1^T P \Pi_2\} = \Pi_1^T P \Pi_2 + \Pi_2^T P^T \Pi_1$,

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= [e_1^T \quad d(t)e_6^T \quad (d(t)-h_1)e_7^T \quad (h_2-d(t))e_8^T]^T, \\ \Pi_2 &= [e_5^T \quad e_1^T - (1-\dot{d}(t))e_2^T \\ &\quad e_3^T - (1-\dot{d}(t))e_2^T \quad (1-\dot{d}(t))e_2^T - e_4^T]^T, \end{aligned}$$

$$\Pi_3 = [e_6^T - d(t)e_{10}^T]^T, \Pi_4 = [e_8^T - (h_2 - d(t))e_{13}^T]^T,$$

$$\Pi_5 = [e_1^T - e_2^T \quad e_1^T + e_2^T - 2e_6^T]^T,$$

$$\Pi_6 = [e_2^T - e_4^T \quad e_2^T + e_4^T - 2e_8^T]^T,$$

$$\Pi_7 = [-e_2^T + e_3^T \quad e_2^T + e_3^T - 2e_7^T]^T,$$

$$\Pi_8 = [e_2^T - e_4^T \quad e_2^T + e_4^T - 2e_8^T]^T,$$

$$\Pi_9 = [e_1^T - e_9^T]^T, \Pi_{10} = [e_1^T + 2e_9^T - 6e_{11}^T]^T,$$

$$\Pi_{11} = [e_3^T - e_7^T]^T, \Pi_{12} = [e_3^T + 2e_7^T - 6e_{12}^T]^T,$$

$$\Pi_{13} = [e_2^T - e_8^T]^T, \Pi_{14} = [e_2^T + 2e_8^T - 6e_{13}^T]^T,$$

$$\Pi_{15} = [e_2^T - e_7^T]^T, \Pi_{16} = [e_2^T - 4e_7^T + 6e_{12}^T]^T,$$

$$\Pi_{17} = [e_4^T - e_8^T]^T, \Pi_{18} = [e_4^T - 4e_8^T + 6e_{13}^T]^T,$$

$$\Pi_{19} = [e_3^T - e_2^T \quad e_3^T + e_2^T - 2e_7^T]^T,$$

$$\Pi_{20} = [e_2^T - e_4^T \quad e_2^T + e_4^T - 2e_8^T]^T,$$

$$e_i = [0_{n \times (i-1)n} \quad I_n \quad 0_{n \times (14-i)n}], i=1, 2, \dots, 14.$$

证明:

沿着系统(6)解轨线对 $V(t)$ 求导可得

$$\dot{V}_1(t) = \xi^T(t) \text{sym}\{\Pi_1^T P \Pi_2\} \xi(t) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &= \xi^T(t) \left[e_1^T \frac{Q}{(d(t))^2} e_1 - e_2^T \varphi_2 e_2 \right] \xi(t) - \\ &\quad \frac{2\dot{d}(t)}{(d(t))^3} \int_{t-d(t)}^t x^T(s) Q x(s) ds \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) &= \xi^T(t) [e_1^T \varphi_1 e_1 - e_3^T R_1 e_3 - e_4^T R_2 e_4] \xi(t) - \\ &\quad (1-\dot{d}(t)) \int_{t-d(t)}^t x^T(s) R_3 x(s) ds \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(t) &= \xi^T(t) [e_1^T h_2 S_3 e_1 + e_5^T \varphi_3 e_5] \xi(t) - \int_{t-h_2}^t \dot{x}^T(s) S_1 \dot{x}(s) ds - \\ &\quad \int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{x}^T(s) S_2 \dot{x}(s) ds - \int_{t-h_2}^t x^T(s) S_3 x(s) ds \end{aligned} \quad (14)$$

由引理 1 对式(12)一式(14)中的积分项进行估

计可得

$$\begin{aligned} -\int_{t-h_2}^{t-d(t)} x^T(s) S_3 x(s) ds &\leq -\xi^T(t) [e_8^T (h_2 - d(t)) S_3 e_8 + \\ &\quad 3\Pi_4^T (h_2 - d(t)) S_3 \Pi_4] \xi(t) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} -\int_{t-d(t)}^t x^T(s) (S_3 + (1-\dot{d}(t))R_3 + \frac{2\dot{d}(t)Q}{(d(t))^3}) x(s) ds &\leq \\ -\xi^T(t) [e_6^T d(t) \varphi_4 e_6 + 3\Pi_3^T d(t) \varphi_4 \Pi_3] \xi(t) \end{aligned} \quad (16)$$

注 2: 将 $-2\dot{d}(t)/(d(t))^3 \int_{t-d(t)}^t x^T(s) Q x(s) ds$, $-(1-\dot{d}(t)) \int_{t-d(t)}^t x^T(s) R_3 x(s) ds$ 和 $-\int_{t-d(t)}^t x^T(s) S_3 x(s) ds$ 整合为新的积分项 $-\int_{t-d(t)}^t x^T(s) [S_3 + (1-\dot{d}(t))R_3 + (2\dot{d}(t)/(d(t))^3)Q] x(s) ds$ 。通过限制条件 $[S_3 + (1-\dot{d}(t))R_3 + (2\dot{d}(t)/(d(t))^3)Q] > 0$, 来确保新的积分项在满足 Wirtinger 积分不等式的条件下进行放缩, 避免引入更多的复杂变量和自由矩阵, 减小计算的复杂度, 降低了结论的保守性。

由引理 2 对式(14)中的积分项进行估计可得

$$\begin{aligned} -\int_{t-h_2}^t \dot{x}^T(s) S_1 \dot{x}(s) ds &= \\ -\int_{t-d(t)}^t \dot{x}^T(s) S_1 \dot{x}(s) ds - \int_{t-h_2}^{t-d(t)} \dot{x}^T(s) S_1 \dot{x}(s) ds &\leq \\ -\xi^T(t) \varphi_5 \xi(t) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} -\int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{x}^T(s) S_2 \dot{x}(s) ds &= \\ -\int_{t-h_2}^{t-d(t)} \dot{x}^T(s) S_2 \dot{x}(s) ds - \int_{t-d(t)}^{t-h_1} \dot{x}^T(s) S_2 \dot{x}(s) ds &\leq \\ -\xi^T(t) \varphi_6 \xi(t) \end{aligned} \quad (18)$$

注 3: 将积分项的单个积分区间 $[t-h_2, t]$ 和 $[t-h_2, t-h_1]$ 分别时滞分割为两个积分区间 $[t-h_2, t-d(t)]$ 、 $[t-d(t), t]$ 和 $[t-h_2, t-d(t)]$ 、 $[t-d(t), t-h_1]$, 再利用 Wirtinger 积分不等式和凸组合方法的有效结合, 对时滞分割后的积分项进行解析。相比文献[20]将其放缩为 $\int_{t-d(t)}^t \dot{x}^T(s) S_1 \dot{x}(s) ds$, 本文的方法更有利于降低结论的保守性。

$$\begin{aligned} \dot{V}_5(t) = & \xi^T(t) \left[e_5^T \boldsymbol{\varphi}_7 e_5 \right] \xi(t) - \int_{-h_1}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_1 \dot{x}(s) ds d\theta - \\ & \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t+\theta}^{t-h_1} \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_2 \dot{x}(s) ds d\theta - \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t-h_2}^{t+\theta} \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_3 \dot{x}(s) ds d\theta = \\ & \xi^T(t) \left[e_5^T \boldsymbol{\varphi}_7 e_5 \right] \xi(t) - (h_2 - d(t)) \int_{t-d(t)}^{t-h_1} \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_2 \dot{x}(s) ds - \\ & (d(t) - h_1) \int_{t-h_2}^{t-d(t)} \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_3 \dot{x}(s) ds - \int_{-h_1}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_1 \dot{x}(s) ds d\theta - \\ & \int_{-d(t)}^{-h_1} \int_{t+\theta}^{t-h_1} \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_2 \dot{x}(s) ds d\theta - \int_{-h_2}^{-d(t)} \int_{t+\theta}^{t-d(t)} \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_2 \dot{x}(s) ds d\theta - \\ & \int_{-d(t)}^{-h_1} \int_{t-d(t)}^{t+\theta} \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_3 \dot{x}(s) ds d\theta - \int_{-h_2}^{-d(t)} \int_{t-h_2}^{t+\theta} \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_3 \dot{x}(s) ds d\theta \end{aligned} \quad (19)$$

由引理 3 和引理 4 对式(19)中的积分项进行估计得

$$-\int_{-h_1}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_1 \dot{x}(s) ds d\theta \leq -\xi^T(t) \boldsymbol{\Theta}_1 \xi(t) \quad (20)$$

$$-\int_{-d(t)}^{-h_1} \int_{t+\theta}^{t-h_1} \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_2 \dot{x}(s) ds d\theta \leq -\xi^T(t) \boldsymbol{\Theta}_2 \xi(t) \quad (21)$$

$$-\int_{-h_2}^{-d(t)} \int_{t+\theta}^{t-d(t)} \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_2 \dot{x}(s) ds d\theta \leq -\xi^T(t) \boldsymbol{\Theta}_3 \xi(t) \quad (22)$$

$$-\int_{-d(t)}^{-h_1} \int_{t-d(t)}^{t+\theta} \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_3 \dot{x}(s) ds d\theta \leq -\xi^T(t) \boldsymbol{\Theta}_4 \xi(t) \quad (23)$$

$$-\int_{-h_2}^{-d(t)} \int_{t-h_2}^{t+\theta} \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_3 \dot{x}(s) ds d\theta \leq -\xi^T(t) \boldsymbol{\Theta}_5 \xi(t) \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & -(h_2 - d(t)) \int_{t-d(t)}^{t-h_1} \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_2 \dot{x}(s) ds - (d(t) - h_1) \int_{t-h_2}^{t-d(t)} \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_3 \dot{x}(s) ds \leq \\ & -\xi^T(t) \boldsymbol{\varphi}_8 \xi(t) \end{aligned} \quad (25)$$

注 4: 将积分项 $\int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t+\theta}^{t-h_1} \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_2 \dot{x}(s) ds d\theta$ 和 $\int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t-h_2}^{t+\theta} \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_3 \dot{x}(s) ds d\theta$ 分别时滞分割为 $\int_{-d(t)}^{-h_1} \int_{t+\theta}^{t-h_1} \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_2 \dot{x}(s) ds d\theta$ 、 $\int_{-h_2}^{-d(t)} \int_{t+\theta}^{t-d(t)} \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_2 \dot{x}(s) ds d\theta$ 、 $(h_2 - d(t)) \int_{t-d(t)}^{t-h_1} \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_2 \dot{x}(s) ds$ 和 $\int_{-d(t)}^{-h_1} \int_{t-d(t)}^{t+\theta} \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_3 \dot{x}(s) ds d\theta$ 、 $\int_{-h_2}^{-d(t)} \int_{t-h_2}^{t+\theta} \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_3 \dot{x}(s) ds d\theta$ 、 $(d(t) - h_1) \int_{t-h_2}^{t-d(t)} \dot{x}^T(s) \mathbf{T}_3 \dot{x}(s) ds$, 再采用基于辅助函数的二重积分不等式来估计上述的二重积分项, 采用 Relaxed 积分不等式来估计上述的一重积分项, 相比直接对其进行估计, 采用此方法有助于降低结论的保守性。
其中,

$$\begin{aligned} \xi(t) = & [x(t) \quad x(t-d(t)) \quad x(t-h_1) \quad x(t-h_2) \quad \dot{x}(t) \rightarrow \\ & \leftarrow \frac{1}{d(t)} \int_{t-d(t)}^t x(s) ds \quad \frac{1}{d(t)-h_1} \int_{t-d(t)}^{t-h_1} x(s) ds \quad \frac{1}{h_2-d(t)} \int_{t-h_2}^{t-d(t)} x(s) ds \rightarrow \\ & \leftarrow \frac{1}{h_1} \int_{t-h_1}^t x(s) ds \quad \frac{1}{(d(t))^2} \int_{-d(t)}^0 \int_{t+\theta}^t x(s) ds d\theta \quad \frac{1}{h_1^2} \int_{-h_1}^0 \int_{t+\theta}^t x(s) ds d\theta \rightarrow \\ & \left. \left. \left. \left. \left. \frac{1}{(d(t)-h_1)^2} \int_{-d(t)}^{-h_1} \int_{t+\theta}^{t-h_1} x(s) ds d\theta \quad \frac{1}{(h_2-d(t))^2} \int_{-h_2}^{-d(t)} \int_{t+\theta}^{t-d(t)} x(s) ds d\theta \right] \right] \right] \right] \end{aligned}$$

引入适当维数的自由矩阵 \mathbf{Y}_1 、 \mathbf{Y}_2 、 \mathbf{Y}_3 有:

$$\Lambda = 2[\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Y}_1 + \mathbf{x}^T(t-d(t)) \mathbf{Y}_2 + \dot{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{Y}_3][-\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_d \mathbf{x}(t-d(t)) + \mathbf{B} \boldsymbol{\omega}(t)] = 0 \quad (26)$$

根据定义 1, 若式(27)成立, 则可保证系统满足 H_∞ 性能指标。

$$\mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}(t) - \gamma^2 \boldsymbol{\omega}^T(t) \boldsymbol{\omega}(t) + \dot{V}(t) < 0 \quad (27)$$

即

$$\xi^T(t) [\mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}(t) - \gamma^2 \boldsymbol{\omega}^T(t) \boldsymbol{\omega}(t) + \dot{V}(t)] \xi(t) < 0 \quad (28)$$

由式(11)—式(28)可得

$$\xi^T(t) \boldsymbol{\Xi} \xi(t) < 0 \quad (29)$$

当 $\boldsymbol{\Xi} < 0$ 时, 可得到保证系统渐近稳定且有 H_∞ 性能指标 γ 的结论, 即定理 1, 故得证。

当系统(6)中 $\boldsymbol{\omega}(t) = 0$ 时, 基于定理 1, 可得系统(4)的稳定性条件如下。

推论 1: 对于给定标量 $0 \leq h_1 \leq h_2$, μ 和 $\gamma > 0$, 若存在正定矩阵 $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{4n \times 4n}$, $\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{R}_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{S}_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{T}_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 及适当维数的自由矩阵 $\mathbf{X}, \mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{Y}_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ($i=1,2,3$), 在 $\forall d(t) \in \{h_1, h_2\}$, $\dot{d}(t) \in \{-\mu, \mu\}$, 有线性矩阵不等式(8)—式(10)成立, 且矩阵 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 = \mathbf{C} = \mathbf{C}_d = \mathbf{D} = 0$, 则系统(4)渐近稳定。推导过程与定理 1 相似, 这里就不再列出。

3 H_∞ 控制器设计

本节在定理 1 的基础上设计控制器 $u(t) = \mathbf{K} \mathbf{x}(t)$, 此时系统(6)变换为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_0 \mathbf{K}) \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_d \mathbf{x}(t-d(t)) + \mathbf{B} \boldsymbol{\omega}(t) \\ \mathbf{z}(t) = (\mathbf{C} + \mathbf{B}_1 \mathbf{K}) \mathbf{x}(t) + \mathbf{C}_d \mathbf{x}(t-d(t)) + \mathbf{D} \boldsymbol{\omega}(t) \\ \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t), \quad t \in [-h_2, 0] \end{cases} \quad (30)$$

式中: $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1$ 为适当维数的常数矩阵; \mathbf{K} 为待求的控制器增益。

将定理 1 中 \mathbf{A} 和 \mathbf{C} 分别用 $\mathbf{A} + \mathbf{B}_0 \mathbf{K}$ 和 $\mathbf{C} + \mathbf{B}_1 \mathbf{K}$ 代替, 令 $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_3$, 且假设 \mathbf{Y}^{-1} 存在, 则会产生形如 $\mathbf{K}^T \mathbf{B}_1^T \mathbf{B}_1 \mathbf{K}$ 、 $\mathbf{Y} \mathbf{B}_0 \mathbf{K}$ 、 $\mathbf{K}^T \mathbf{B}_0^T \mathbf{Y}$ 等非线性项, 为了将控制器设计条件转化为严格线性矩阵不等式, 本文给出如下线性化方法。

(1) 将定理 1 中的元素分为 \mathbf{U} 、 \mathbf{UV} 和 $(\mathbf{VU})^T \mathbf{VU}$

本文推论 1 方法计算的最大时滞上界高于文献[11]和文献[21]。当 $\mu=0.5$ 、 $h_1=1$ s 时, 文献[11]得到的时滞上界 $h_2=2.46$ s, 文献[21]得到的时滞上界 $h_2=2.40$ s, 而推论 1 得到的时滞上界 $h_2=2.83$ s。可以看出, 本文方法降低了结论的保守性。

表 1 给定 μ 和 h_1 时系统最大允许时滞上界

μ	方法	$h_1=1$	$h_1=2$	$h_1=3$
0.5	文献[11]	2.46	2.79	3.48
	文献[21]	2.40	2.83	3.50
	推论 1	2.83	3.01	3.59
0.9	文献[15]	2.29	2.77	3.48
	文献[21]	2.40	2.83	3.50
	推论 1	2.75	2.93	3.57

4.2 单机无穷大系统

选用单机无穷大系统, 系统结构图如图 1 所示。其具体系统参数参照文献[22]的数据, 其中矩阵 A 、 A_d 分别为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 376.9911 & 0 & 0 \\ -0.0963 & -0.7000 & -0.0801 & 0 \\ -0.0480 & 0 & -0.1667 & 0.1000 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0000 \end{bmatrix}$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 38.0187 & 0 & -95.2560 & 0 \end{bmatrix}$$

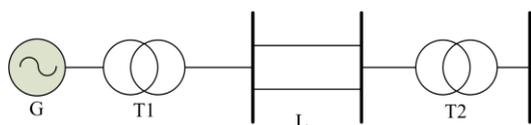


图 1 单机无穷大系统

Fig. 1 Single-machine infinite-bus system

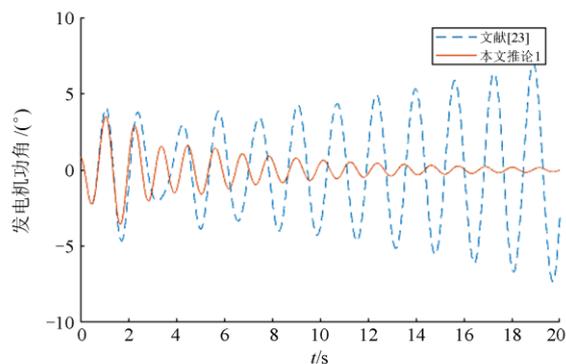
表 2 给出了采用不同方法求出的系统最大时滞上界。从表中数据可以看出, 本文推论 1 求出的最大时滞上界 $h_2=0.072$ s, 均大于文献[9-10]和文献[20,22-23]所用的方法, 从而验证本文的方法有效地降低了结论的保守性, 扩大了系统的运行范围。

表 2 不同方法求出的最大时滞值

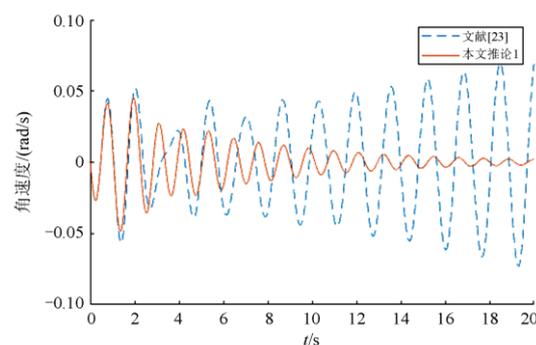
方法	文献[9]	文献[10]	文献[23]	文献[20]	文献[22]	推论 1
h_2/s	0.060 9	0.065 3	0.065 4	0.068 1	0.069 7	0.072 0

本文推论 1 的方法与文献[23]的方法在时滞为 0.072 0 s 时, 发电机功角与角速度变化曲线如图 2 所示。可以看出文献[23]的方法在时滞为 0.072 0 s

时系统是不稳定的, 而本文推论 1 的方法在时滞为 0.072 0 s 时系统逐渐趋于稳定, 进一步说明本文方法扩大了系统的稳定运行范围。



(a) $h=0.072$ 0 s 时发电机功角变化曲线图



(b) $h=0.072$ 0 s 时角速度变化曲线图

图 2 $h=0.072$ 0 s 时系统的稳定性

Fig. 2 System stability with $h=0.072$ 0 s

4.3 两区四机系统

为进一步验证本文方法在多机系统中的有效性, 采用如图 3 所示的两区四机系统进行分析。

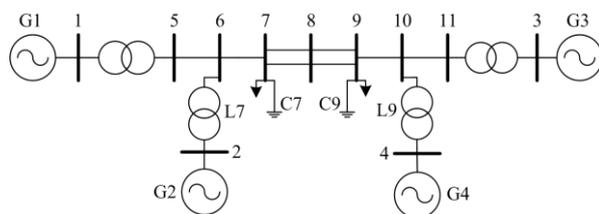


图 3 两区四机系统

Fig. 3 Four-machine two-area system

根据文献[4]中的模态分析法, 获得四机电力系统降阶后的状态矩阵 A 、 A_d 。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 376.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 376.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 376.9 \\ -0.073 & 0.065 & 0.004 & -0.73 & 0.272 & 0.076 \\ 0.058 & -0.087 & 0.009 & 1.16 & -0.343 & -0.134 \\ 0.008 & 0.011 & -0.082 & -0.02 & 0.047 & -0.554 \end{bmatrix}$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.234 & -0.839 & 0.010 \\ 0 & -0.0011 & 0.001 & -0.348 & -1.362 & -0.138 \\ 0 & 0.001 & 0 & 0.049 & -0.290 & -0.638 \end{bmatrix}$$

利用推论 1 求得系统的时滞上界为 0.445 s, 相比文献[5]的 0.195 s、文献[4]的 0.288 s 和文献[23]的 0.440 s, 推论 1 得到的时滞上界最大, 从而验证了本文方法在降低时滞电力系统结论保守性方面的有效性, 同时也进一步验证了该方法在多机系统中的可行性。

4.4 H_∞ 性能分析

考虑系统(6), 具体参数参照文献[24]的数据。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.375 & -1.15 \end{bmatrix}, B = [0.1 \quad 0.1]^T,$$

$$C = [0 \quad 1], C_d = [-0.375 \quad -1.15], D = 0.$$

由定理 1 求出了在 $\mu=0$ 和给定 h_1 、 h_2 下的最小允许 H_∞ 性能指标 γ , 如表 3 所示。其中文献[24]利用 Jensen 不等式, 文献[25]利用 Wirtinger 积分不等式, 文献[26]利用 Wirtinger-based 二重积分不等式, 文献[27]利用交互式凸组方法。从表 3 可看出, 在相同条件下, 采用本文的方法有效降低了结论的保守性。

表 3 给定条件下 H_∞ 性能的最小 γ 值

Table 3 Minimized H_∞ performance γ under given condition

方法	$h_1=0$	$h_1=0.5695$	$h_1=0$	$h_1=0.9$
	$h_2=0.8695$	$h_2=0.8695$	$h_2=1.0$	$h_2=1.0$
文献[24]	0.81	0.72	2.95	1.73
文献[25]	0.605 0	0.568 2	1.446 6	1.168 3
文献[26]	0.51	0.35	1.97	0.94
文献[27]	0.24	0.22	0.27	0.24
定理 1	0.22	0.21	0.25	0.24

4.5 H_∞ 控制器设计

为说明本文控制器的有效性, 系统(30)中的状态矩阵取值为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 376.9911 & 0 & 0 \\ -0.0963 & -0.7000 & -0.0801 & 0 \\ -0.0480 & 0 & -0.1667 & 0.1000 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0000 \end{bmatrix},$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 38.0187 & 0 & -95.2560 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T, B = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T,$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0], B_1 = 0, C_d = 0, D = 0.1.$$

取 $\mu=0$ 、时滞下界 $h_1=0.001$ s 和时滞上界 $h_2=0.07$ s, 由定理 2 得系统渐近稳定的最小 H_∞ 性能指标 $\gamma=0.207$ 和 H_∞ 控制增益矩阵为

$$K = [-71.76 \quad -767.758 \quad -48.43 \quad -0.45]$$

系统初始运行点为 $x_0 = [0.8045 \quad 0 \quad 1.2492 \quad 1.6196]$, 外部干扰 $\omega(t) = \sin(2\pi ft)$ ($f=50$ Hz)。图 4—图 7 分别给出了有/无控制器作用下的系统功角、角速度、暂态电势及励磁电势的响应曲线。由图 4—图 7 可以看出, 在控制器的作用下, 系统曲线的振荡幅度较小, 收敛较快, 说明设计的控制器可以有效地降低系统趋于稳定的过渡时间, 增强了系统的稳定性。

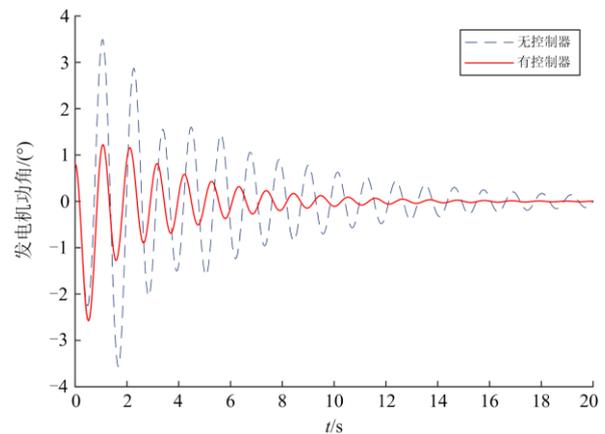


图 4 有/无控制器时系统功角响应曲线

Fig. 4 Response curves of rotor angle with controller or without controller

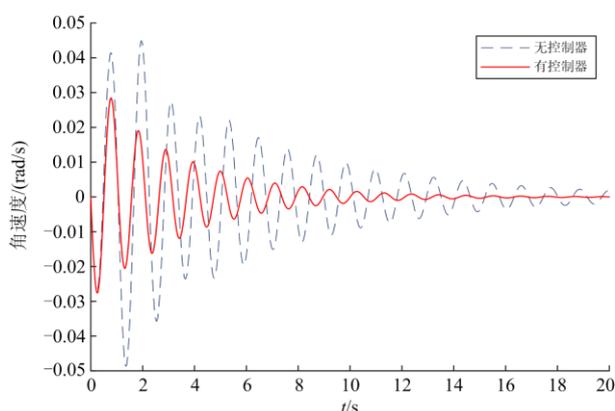


图5 有/无控制器时系统角速度响应曲线

Fig. 5 Response curves of angle speed with controller or without controller

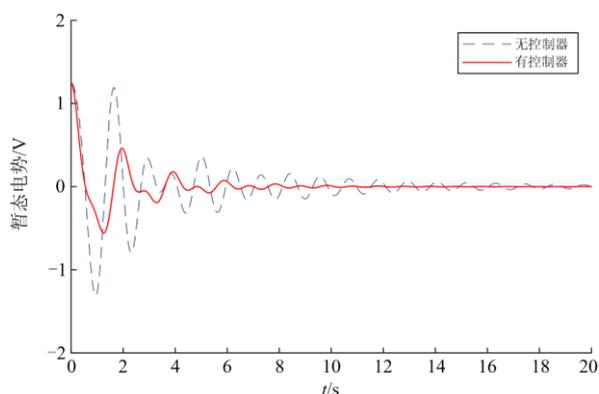


图6 有/无控制器时系统暂态电势响应曲线

Fig. 6 Response curves of transient voltage with controller or without controller

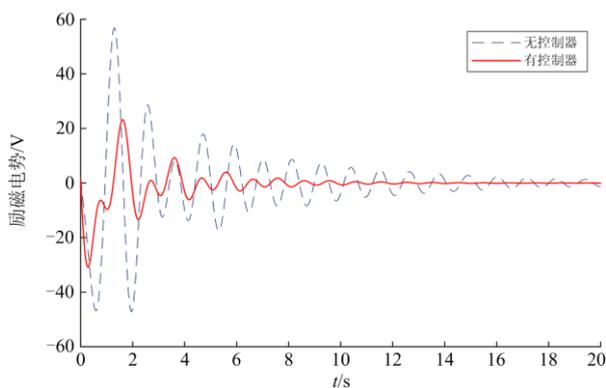


图7 有/无控制器时系统励磁电势响应曲线

Fig. 7 Response curves of exciting voltage with controller or without controller

5 结论

本文研究了变时滞电力系统 H_∞ 控制问题。通过

构造包含更多时滞信息的 L-K 泛函, 并利用 Relaxed 积分不等式、Wirtinger 积分不等式和凸组合等方法对泛函导数进行估计, 降低了结论的保守性。在此基础上, 设计了一种无记忆 H_∞ 状态反馈控制器, 并给出非线性项的线性化方法, 得到了控制器存在性的条件。最后通过仿真分析验证了本文所提方法的有效性和优越性。在后续的研究中, 将考虑时滞发生的随机性对系统稳定性的影响。

参考文献

- [1] 袁明军, 江浩, 黎强, 等. 四统一四规范同步相量测量装置关键技术研究[J]. 电力系统保护与控制, 2019, 47(4): 182-187.
YUAN Mingjun, JIANG Hao, LI Qiang, et al. Research on key technology of four unified four standard phasor measurement unit[J]. Power System Protection and Control, 2019, 47(4): 182-187.
- [2] 李志豪, 陈皓勇. 基于 PMU 量测的配电网稀疏估计[J]. 电力系统保护与控制, 2020, 48(23): 11-20.
LI Zhihao, CHEN Haoyong. Sparse estimation of a distribution network based on PMU measurement[J]. Power System Protection and Control, 2020, 48(23): 11-20.
- [3] ZHAO J, ZHANG Y, ZHANG P. Development of a WAMS based test platform for power system real time transient stability detection and control[J]. Protection and Control of Modern Power Systems, 2016, 1(1): 37-47. DOI: 10.1186/s41601-016-0013-1.
- [4] 马静, 李俊臣, 李益楠, 等. 基于改进自由权矩阵与广义特征值的时滞稳定上限计算方法研究[J]. 电力系统保护与控制, 2014, 42(18): 1-8.
MA Jing, LI Junchen, LI Yinan, et al. Research on time-delay upper-bound of power system wide-area damping controllers based on improved free-weighting matrices and generalized eigenvalue problem[J]. Power System Protection and Control, 2014, 42(18): 1-8.
- [5] 关琳燕, 周洪, 胡文山. 基于 Hamilton 理论的广域非线性时滞多机电力系统的稳定与控制[J]. 电力系统保护与控制, 2016, 44(19): 17-24.
GUAN Linyan, ZHOU Hong, HU Wenshan. Nonlinear wide-area time-delay stabilization and control of multi-machine power system based on Hamilton theory[J]. Power System Protection and Control, 2016, 44(19): 17-24.
- [6] 陈中, 唐浩然, 邢强, 等. 计及随机时滞与丢包的电力系统广域信号预测补偿方法[J]. 电力系统保护与控制, 2019, 47(15): 31-39.
CHEN Zhong, TANG Haoran, XING Qiang, et al. A

- prediction compensation method considering stochastic time delay and data loss of power system wide-area signals[J]. *Power System Protection and Control*, 2019, 47(15): 31-39.
- [7] 钱伟, 吴嘉欣, 费树岷. 基于时滞依赖矩阵泛函的变时滞电力系统稳定性分析[J]. *电力系统自动化*, 2020, 44(1): 53-58.
QIAN Wei, WU Jiabin, FEI Shumin. Analysis on power systems stability with time-varying delay based on delay-dependent matrix functional[J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2020, 44(1): 53-58.
- [8] 董朝宇, 贾宏杰, 姜懿郎. 含积分二次型的电力系统改进时滞稳定判据[J]. *电力系统自动化*, 2015, 39(24): 35-40.
DONG Chaoyu, JIA Hongjie, JIANG Yilang. Time-delay stability criteria for power system with integral quadratic form[J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2015, 39(24): 35-40.
- [9] 孙国强, 屠越, 孙永辉, 等. 时变时滞电力系统鲁棒稳定性的改进型判据[J]. *电力系统自动化*, 2015, 39(3): 59-62.
SUN Guoqiang, TU Yue, SUN Yonghui, et al. An improved robust stability criterion for power systems with time-varying delay[J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2015, 39(3): 59-62.
- [10] 黄柳强, 郭剑波, 孙华东, 等. 多 FACTS 广域抗时滞协调控制[J]. *电力自动化设备*, 2014, 34(1): 37-42.
HUANG Liuqiang, GUO Jianbo, SUN Huadong, et al. Wide-area anti-delay coordinated control among FACTS controllers[J]. *Electric Power Automation Equipment*, 2014, 34(1): 37-42.
- [11] 李宁, 孙永辉, 卫志农, 等. 基于 Wirtinger 不等式的电力系统延时依赖稳定判据[J]. *电力系统自动化*, 2017, 41(2): 108-113.
LI Ning, SUN Yonghui, WEI Zhinong, et al. Delay-dependent stability criteria for power system based on Wirtinger integral inequality[J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2017, 41(2): 108-113.
- [12] LI J, CHEN Z, CAI D, et al. Delay-dependent stability control for power system with multiple time-delays[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2016, 31(3): 2316-2326.
- [13] ZHAO X, SUN Y, LI N, et al. Robust H_∞ load frequency control of delayed multi-area power system with stochastic disturbances[J]. *Neurocomputing*, 2016, 193: 58-67.
- [14] 邓玮瑾, 王淑芬. 考虑通信延时的不确定直流微电网 H_∞ 控制器设计[J]. *电网技术*, 2018, 12(12): 4053-4060.
DENG Weihua, WANG Shufen. H_∞ controller design for uncertain DC microgrid considering communication time delays[J]. *Power System Technology*, 2018, 12(12): 4053-4060.
- [15] 聂永辉, 张艺川, 马彦超, 等. 计及时滞影响的电力系统 H_∞ 阻尼控制[J]. *电力自动化设备*, 2018, 38(10): 102-106.
NIE Yonghui, ZHANG Yichuan, MA Yanchao, et al. H_∞ damping control of power system with time delay[J]. *Electric Power Automation Equipment*, 2018, 38(10): 102-106.
- [16] 厉文秀. 随机时滞电力系统稳定性分析[J]. *电力与能源*, 2015, 36(1): 10-15.
LI Wenxiu. Analysis of stability of stochastic time delay power systems[J]. *Power and Energy*, 2015, 36(1): 10-15.
- [17] QIAN W, YUAN M, WANG L, et al. Robust stability criteria for uncertain systems with interval time-varying delay based on multi-integral functional approach[J]. *Journal of the Franklin Institute-engineering and Applied Mathematics*, 2017, 355(2): 849-861.
- [18] PARK P G, LEE W I, LEE S Y. Auxiliary function-based integral inequalities for quadratic functions and their applications to time-delay systems[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, 352(4): 1378-1396.
- [19] QIAN W, GAO Y S, CHEN Y, et al. The stability analysis of time-varying delayed systems based on new augmented vector method[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, 356(3): 1268-1286.
- [20] 钱伟, 蒋鹏冲. 时滞电力系统带记忆反馈控制方法[J]. *电网技术*, 2017, 41(11): 3605-3611.
QIAN Wei, JIANG Pengchong. A method of memory feedback control for power system with time-delay[J]. *Power System Technology*, 2017, 41(11): 3605-3611.
- [21] LIU K, SEURET A, XIA Y. Stability analysis of systems with time-varying delays via the second-order Bessel-Legendre inequality[J]. *Automatica*, 2017, 76: 138-142.
- [22] 钱伟, 王晨晨, 费树岷. 区间变时滞广域电力系统稳定性分析与控制器设计[J]. *电工技术学报*, 2019, 34(17): 3640-3650.
QIAN Wei, WANG Chenchen, FEI Shumin. Stability analysis and controller design of wide-area power system with interval time-varying delay[J]. *Transactions of China Electrotechnical Society*, 2019, 34(17): 3640-3650.
- [23] 钱伟, 蒋鹏冲, 车凯. 基于 Wirtinger 不等式的时变时滞电力系统稳定性分析[J]. *电力系统保护与控制*, 2016, 44(23): 79-85.
QIAN Wei, JIANG Pengchong, CHE Kai. Stability analysis for power system with time-delay based on

- Wirtinger inequality[J]. Power System Protection and Control, 2016, 44(23): 79-85.
- [24] LEE W I, LEE S Y, PARK P. Improved criteria on robust stability and H_∞ performance for linear systems with interval time-varying delays via new triple integral functionals[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 243: 570-577.
- [25] KWON O M, PARK M J, PARK J H, et al. Improvement on the feasible region of H_∞ performance and stability for systems with interval time varying delays via augmented Lyapunov-Krasovskii functional[J]. Journal of the Franklin Institute, 2016, 353(18): 4979-5000.
- [26] BAI Y, LI Z C, HUANG C Z. New H_∞ control approaches for interval time-delay systems with disturbances and their applications[J]. ISA Transactions, 2016, 65: 174-85.
- [27] QIAN W, XING W, WANG L, et al. New optimal analysis method to stability and H_∞ performance of varying delayed systems[J]. ISA transactions, 2019, 93: 137-144.

收稿日期: 2020-12-19; 修回日期: 2021-01-10

作者简介:

汪豪(1995—), 男, 硕士研究生, 研究方向为电力系统及其自动化; E-mail: whwanghaohh@163.com

钱伟(1978—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为鲁棒控制、智能控制等; E-mail: qwei@hpu.edu.cn

郭建峰(1980—), 男, 通信作者, 硕士, 工程师, 研究方向为过程控制、智能控制等。E-mail: gjf@hpu.edu.cn

(编辑 许威)