

DOI: 10.19783/j.cnki.pspc.200178

# 基于离散傅里叶变换矩阵的概率最优潮流计算方法

许丹<sup>1</sup>, 丁强<sup>1</sup>, 林星宇<sup>2</sup>, 乐彦婷<sup>2</sup>, 唐俊杰<sup>2</sup>

(1. 中国电力科学研究院, 北京 100192;

2. 输配电装备及系统安全与新技术国家重点实验室(重庆大学), 重庆 400044)

**摘要:** 随着大规模可再生能源并网, 不确定性源增多, 现代电力系统规模扩大, 导致其电力系统概率最优潮流计算更加耗时。其中, 网络规模变大将导致单次确定性最优潮流的求解变得更为复杂, 而另一方面不确定源变多的潜在后果是必须增加确定性最优潮流的求解次数才能保证输出结果的精确性。针对上述问题, 引入离散傅里叶变换法(Discrete Fourier transformation matrix, DFTM)对概率最优潮流进行分析与计算, 并对其样本点的选取策略进行了深入分析。DFTM法采点数量灵活, 同时可以精确地处理具有相关性的随机变量, 能够较好地兼顾目前概率最优潮流计算中的精度与速度问题。最后基于改进的IEEE 118节点算例, 以传统蒙特卡洛模拟法的结果作为参考, 验证了DFTM法在非对称分布变量所占比例不同场景下的概率最优潮流计算精度与速度优势。并通过与无迹变换法进行对比, 进一步展现了DFTM法的优越性能。

**关键词:** 可再生能源并网; 概率最优潮流; 离散傅里叶变换矩阵; 蒙特卡洛模拟法; 非对称分布变量

## Probabilistic optimal power flow calculation method based on a discrete Fourier transformation matrix

XU Dan<sup>1</sup>, DING Qiang<sup>1</sup>, LIN Xingyu<sup>2</sup>, LE Yanting<sup>2</sup>, TANG Junjie<sup>2</sup>

(1. China Electric Power Research Institute, Beijing 100192, China; 2. The State Key Laboratory of Power Transmission Equipment & System Security and New Technology, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**Abstract:** With the vast integration of renewable energy, modern power systems are becoming large-scale networks with a greater number of uncertainty sources, which makes Probabilistic Optimal Power Flow (POPF) analysis quite time-consuming. On the one hand, the larger scale of a network makes the implementation of the Deterministic Optimal Power Flow (DOPF) more complicated; on the other hand, to obtain an accurate output, a heavier computation burden on DOPF is unavoidable due to the more uncertainty sources. Correspondingly, a Discrete Fourier Transformation Matrix (DFTM) is adopted to implement a probabilistic optimal power flow calculation, and the characteristics of DFTM samples are further investigated. The DFTM method is flexible in sampling point and can accurately handle the correlation amongst variables. Therefore, the DFTM method is able to balance the accuracy and efficiency of POPF analysis. Finally, the modified IEEE 118-bus system is adopted and the Monte Carlo simulation method is used as a reference to verify the effectiveness and superiority of the DFTM method in different proportion of asymmetrically distributed random variables. Compared with the unscented transformation method, the superiority of DFTM method is shown further.

This work is supported by Science and Technology Project of State Grid Corporation of China (No. 5442DZ170034) and National Natural Science Foundation of China for International Cooperation and Exchanges (No. 5181101576).

**Key words:** integration of renewable energy; probabilistic optimal power flow; discrete Fourier transformation matrix; Monte Carlo simulation method; asymmetrically distributed random variables

## 0 引言

近年来, 人们对高品质的生活环境和生活方式

的追求极大地推动了可再生能源的发展。根据 21 世纪可再生能源政策网络在 2019 年的可再生能源全球状况报告中显示, 在整个 2018 年, 全世界的可再生能源发电的装机容量占总装机容量的 33% 以上, 且可再生能源发电量约占总发电量的 26.2%。其中除水电站外, 风电厂和光伏电站发电量所占比重较大, 分别达到总发电量的 5.5% 和 2.4%。此外,

**基金项目:** 国家电网科技项目资助(5442DZ170034)“考虑断面约束的中长期检修安排和大规模电力外送协调优化技术研究与应用”; 国家自然科学基金国际(地区)合作与交流项目(5181101576)

风电和光伏发电发展迅猛,2018年的数据统计中新增风电、光伏装机容量分别占到全年新增可再生能源装机容量的28.19%和55.28%<sup>[1]</sup>。

随着高比例可再生能源的并网,其自身所固有的随机性和间歇性将极大地影响整个电力系统的运行状态。对于如风电场、光伏电站和潮汐电站等发电厂,其一次能源如风速、光照强度和潮汐流速的供给具有很强的概率不确定性,导致其功率输出也具有概率不确定性<sup>[2]</sup>。在电力系统的运行过程中,当可再生能源发电占到一定比例时,其出力的随机波动会给整个系统的安全运行带来潜在的严重威胁,如电压稳定性问题<sup>[3]</sup>。另外,随着科技的发展,负荷类型也在不断增加,负荷的不确定性也应该纳入到考虑之中<sup>[4-5]</sup>。

作为分析电力系统运行的有效工具,最优潮流(Optimal Power Flow, OPF)可以找到一种满足所有运行约束且同时将系统运行成本降到最低的潮流分布。然而在考虑到整个网络中所含有的概率不确定性源时,传统的确定性最优潮流(Deterministic Optimal Power Flow, DOPF)计算便难以适应当前应用场景。在这样的情况下,概率最优潮流(Probabilistic Optimal Power Flow, POPF)通过考虑输入变量的概率分布特性,求取目标函数以及对应控制变量和其他变量的概率信息,能够较好地应对含有随机变量的电力系统的最优潮流分析。

同概率潮流(Probabilistic Power Flow, PPF)类似,POPF的计算方法一般也分为三类,即模拟法、解析法和近似法。唯一不同的是,POPF的确定性模型更为复杂,主要体现在其非线性程度更高。对于这三种计算方法,模拟法一般是指蒙特卡洛模拟法(Monte Carlo simulation method, MCSM),在样本数量充足的情况下,MCSM的精度极高。因此,在对其他概率方法的分析中,MCSM一般被用作评估精度的参考方法。文献[6]使用MCSM实现了POPF的计算,并能够较好地处理具有相关性的非正态分布变量。但是,由于MCSM的高精度需要大量的计算样本作为前提,所以MCSM在实际工程中的应用非常受限。文献[7-8]通过Sobol样本序列,文献[9]通过使用拉丁超立方样本均对于MCSM的改进方法,其改善了样本点的特性,使用更少样本数也能得到精确的计算结果,但其所需样本数仍然达到了 $O(10^3)$ 这一数量级,难以满足实时计算的需求。

解析法一般会线性化原始模型,使用概率论手段的推导传递随机变量的概率性质,从而得到输出变量的概率特性,其计算速度极快<sup>[10-11]</sup>。但是在PPF分析应用中,对于规模较大变量较多的网络,解析

法已经显露出了其在精度上的不足。在之前提到,在POPF分析中,DOPF模型要比一般的确定性潮流(Deterministic Power Flow, DPF)计算模型更为复杂,非线性程度更高。因此在POPF计算中,若使用解析法对整个DOPF模型进行线性化的近似,将引入更大的误差。此外,有的解析法很难处理变量之间的相关性,而大量实验表明,随机变量的相关性会对目标输出的概率信息产生显著的影响<sup>[12]</sup>。因此,就目前的技术发展而言,解析法也不是实现POPF计算的最佳选择。

近似法是一种根据输入随机变量的概率特性对输出变量的概率信息进行估计的计算方法,一般通过选取少量的样本点进行相应的确定性计算,即可完成对输出变量的均值与方差(或标准差)估计。近似法避免了大量采样,提高了概率分析速度,并且可以处理随机变量之间的相关性。点估计法(Point Estimate Method, PEM)<sup>[13-17]</sup>和无迹变换(Unscented Transformation Method, UTM)<sup>[18-19]</sup>都是典型的近似法。它们通过与Nataf变换的结合,都能够处理具有线性相关性的随机变量。文献[20]首次引入离散傅里叶变换矩阵法(Discrete Fourier transformation matrix, DFTM)来处理PPF问题,其结果证明了DFTM可以较好地处理具有相关性的随机变量,且随机变量可以服从多种分布。然而,DFTM至今未被应用在POPF计算中。

基于上述背景,本文通过研究将DFTM法首次引入POPF计算应用领域。同时,本文还深入分析并挖掘出DFTM法的样本采点特性,最后通过标准算例中与不同概率方法的对比实验展现了DFTM法的特点和优势。

## 1 基本模型

本节主要介绍了现有最优潮流的确定性模型和随机输入变量的概率模型,后者具体包括边缘分布函数和相关系数的建立。

### 1.1 确定性计算模型

根据Matpower软件包的设定,本文所采用的最优潮流模型如式(1)所示<sup>[21]</sup>。

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\theta, P_G} \sum_{i_G=1}^{N_G} a_{i_G} P_{G,i_G}^2 + b_{i_G} P_{G,i_G} + c_{i_G} \\ \text{s.t.} \\ \mathbf{B}_{\text{bus}} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{P}_{\text{bus,shift}} + \mathbf{P}_d + \mathbf{G}_{\text{sh}} - \mathbf{C}_G \mathbf{P}_G = \mathbf{0} \\ |\mathbf{P}_{\text{branch}}| \leq \mathbf{P}_{\text{branch}}^{\max} \\ \theta_{\text{ref},i_0} = \theta_{i_0}^{\text{ref}}, i_0 \in \Theta_{\text{ref}} \\ P_{G,i_G}^{\min} \leq P_{G,i_G} \leq P_{G,i_G}^{\max} \end{array} \right. \quad (1)$$

式(1)中以发电成本为目标函数, 约束条件包括直流潮流方程约束, 支路有功约束, 节点电压相角约束以及发电机出力约束。\$N\_G\$ 是发电机数量; \$\theta\$ 代表节点电压相角向量; \$\mathbf{P}\_G\$ 代表发电机有功出力向量, 其中 \$P\_{G,iG}\$ 代表第 \$i\_G\$ 台发电机的有功出力。\$a\_{iG}\$, \$b\_{iG}\$ 和 \$c\_{iG}\$ 分别代表第 \$i\_G\$ 台发电机的发电成本系数。在约束条件中, \$\mathbf{B}\_{bus}\$ 代表网络的节点电纳矩阵, 其中所有电纳均忽略了对地支路的参数。\$\mathbf{P}\_{bus,shift}\$ 是移相变压器的注入功率向量, \$\mathbf{P}\_d\$ 是负的节点负荷向量。\$\mathbf{G}\_{sh}\$ 是对地支路电导向量, 在节点电压幅值的标幺值均为 1 时, 其元素值约等于对地支路的有功损耗的负值。\$\mathbf{C}\_G\$ 是发电机的位置矩阵。\$\mathbf{P}\_{branch}\$ 表示支路有功潮流向量, \$\mathbf{P}\_{branch}^{max}\$ 表示支路有功潮流的最大值向量。\$i\_0\$ 是相位参考节点的节点编号, \$\theta\_{ref,i\_0}\$ 表示相位参考节点 \$i\_0\$ 的电压相角值, \$\theta\_{i\_0}^{ref}\$ 表示相位参考节点的电压相角的给定值。\$\Theta\_{ref}\$ 是相位参考节点的集合。\$P\_{G,iG}^{min}\$ 和 \$P\_{G,iG}^{max}\$ 分别表示第 \$i\_G\$ 台发电机的有功出力的下限值与上限值。

若系统中包含如风速, 随机波动负荷等随机源, 相应的概率模型输出也应该具有概率的性质。但是在实际计算中, 还需要嵌入从一次能源到对应电厂发电功率的转换过程。本文涉及到的从风速到风力发电机出力的转换式如式(2)所示<sup>[22]</sup>。

$$P_T = \begin{cases} 0, & 0 \leq v_{wind} < 4 \\ \frac{2}{11}(v_{wind} - 4), & 4 \leq v_{wind} < 15 \\ 2, & 15 \leq v_{wind} \leq 25 \\ 0, & v_{wind} > 25 \end{cases} \quad (2)$$

式中: \$v\_{wind}\$ 为风速, 单位 m/s; \$P\_T\$ 为单台风机出力, 单位 MW。

POPF 模型输出可以包括目标函数、节点电压相角、支路有功潮流以及网络损耗等。如果用 \$\mathbf{Y}\$ 表示最终的输出, 用 \$\mathbf{X}\$ 表示风速、具有波动性的负荷等输入, 那么基于式(1)和式(2)而建立的 POPF 模型可以一般性地如式(3)所示。

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}) \quad (3)$$

## 1.2 随机变量边缘分布模型

对于电力系统含有的随机变量, 风速一般用威布尔分布(Weibull distribution)来建模, 而负荷的波动一般用正态分布(Normal distribution)来描述。本文在只考虑风电厂接入和负荷的随机波动的情况下, 所使用的边缘分布模型如表 1 所示。表中, \$K\$ 和 \$D\$ 分别是 Weibull 分布的形状参数和尺度参数, \$\mu\$ 和 \$\sigma\$ 分别是正态分布的均值与标准差。

表 1 边缘分布模型

Table 1 Marginal distribution models			
分布类型	累积分布函数	随机源种类	参考文献
Weibull	$1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{D}\right)^K\right)$	风速	[22]
Normal	$\int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt$	负荷	[4]

## 1.3 皮尔森相关系数

围绕随机变量的建模除了各自边缘分布建模以外, 还需要对变量之间的相关性进行刻画。本文选择皮尔森相关系数来描述随机变量之间的相关性。对于随机变量 \$X\_i\$ 和 \$X\_j\$, 已知其均值与标准差分别为 \$\mu\_i\$、\$\mu\_j\$、\$\sigma\_i\$ 和 \$\sigma\_j\$; 另外, 两个变量之积的均值为 \$\mu\_{ij}\$。那么他们之间的线性相关系数 \$\rho\_{ij}\$ 可以通过式(4)计算得到<sup>[23]</sup>。

$$\rho_{ij} = \frac{\mu_{ij} - \mu_i \mu_j}{\sigma_i \sigma_j} \quad (4)$$

需要注意的是, 在变量分别进行单调的非线性变换时, 变换前后变量之间的皮尔森相关系数数值会有些许的变化。

## 2 概率方法基本理论

本节主要介绍了 Nataf 变换法和离散傅里叶变换矩阵法的理论, 并将二者相结合能够实现高效处理具有相关性且服从非正态分布随机变量的概率方法, 深入分析并挖掘出了离散傅里叶变换矩阵法的样本选取特点。

### 2.1 Nataf 变换

对于大多数概率方法, 产生具有特定线性相关性的服从任意非正态分布的样本是比较困难的。而 Nataf 变换, 采用等概率原理, 建立起了标准正态分布域和原始分布域之间的桥梁, 使样本能够在标准正态分布域中产生<sup>[24]</sup>。对于 \$m\$ 维服从任意分布的随机变量向量 \$\mathbf{X}\$, 即 \$\mathbf{X} = [X\_1, \dots, X\_i, \dots, X\_m]\$, 且使用 \$m \times m\$ 的相关系数矩阵 \$\mathbf{C}\_X\$ 来描述变量 \$\mathbf{X}\$ 之间的相关性。设在标准正态分布域, 有同等维度的标准高斯随机变量向量 \$\mathbf{Z}\$ 与 \$\mathbf{X}\$ 对应。对于两者的第 \$i\$ 个随机变量 \$X\_i\$ 和 \$Z\_i\$, 他们之间满足关系式(5)。

$$X_i = F_{X_i}^{-1}[\Phi(Z_i)] \quad (5)$$

式中: \$F\_{X\_i}^{-1}\$ 表示变量 \$X\_i\$ 的累积分布函数的反函数; \$\Phi\$ 表示标准正态分布的累积分布函数。

同样, 使用 \$m \times m\$ 的相关系数矩阵 \$\mathbf{C}\_Z\$ 来描述变量 \$\mathbf{Z}\$ 之间的相关性。根据 1.3 节中的内容, \$m\$ 个原始分布域随机变量互相之间的相关系数在转换到标准正态分布域后, 其数值略有不同。因此相关系数

矩阵  $C_Z$  中的非对角元素都需要求取, 而又因为相关系数矩阵是对称方阵, 所以需要求取的元素个数为  $0.5m^2 - 0.5m$ 。在已知原始分布域变量的累积分布函数的反函数和原始分布域的相关系数矩阵  $C_X$  的情况下,  $C_Z$  可以根据文献[25]提出的方法进行快速求解。

## 2.2 离散傅里叶变换矩阵法

DFTM 法是一种先进的概率近似法, 其采点灵活, 结合 Nataf 变换能够很好地处理含有具有相关性的随机变量的概率问题。本文将 DFTM 法首次应用于 POPF 计算, 主要实现步骤如下。

步骤 1: 建立独立的标准正态分布变量向量  $U$  和具有相关性的标准正态分布变量向量  $Z$  的关系为

$$Z = LU \quad (6)$$

式中,  $L$  是一个下三角矩阵, 它可以通过对矩阵  $C_Z$  进行 Cholesky 分解得到, 即  $C_Z = LL^T$ 。这里的上标  $T$  表示矩阵的转置。将 Nataf 变换和式(6)写进式(3), 得到式(7)。

$$Y = f(X) = f[F_X^{-1}(Z)] = f[F_X^{-1}(LU)] = G(U) \quad (7)$$

输出变量  $Y$  的  $r$  阶原点矩可表示为式(8)。

$$E(Y^r) = \int \cdots \int G(u_1, \cdots, u_m)^r \varphi(u_1, \cdots, u_m, \mathbf{I}) du_1 \cdots du_m \quad (8)$$

式中:  $\varphi$  表示  $m$  维标准正态分布变量的联合密度函数;  $\mathbf{I}$  表示独立标准正态分布变量向量  $U$  的相关系数矩阵, 它是一个主对角线元素全为 1, 其余元素全为 0 的  $m$  阶方阵。

步骤 2: 根据数值积分的理论, 式(9)表明输出变量的  $r$  阶原点矩  $E(Y^r)$  可以用一系列基于  $U$  的样本点的输出(即积分点)的加权和来近似得到。

$$E(Y^r) \approx \sum_{s=1}^n p_s G(t_{1,s}, \cdots, t_{i,s}, \cdots, t_{m,s})^r = \sum_{s=1}^n p_s G(\mathbf{T}_s)^r \quad (9)$$

式中:  $n$  是所使用的样本个数, 要求  $n$  为大于  $m$  的整数;  $t_{i,s}$  是样本点矩阵  $\mathbf{T}$  的第  $i$  行  $s$  列的元素;  $\mathbf{T}_s$  为  $\mathbf{T}$  的第  $s$  个列向量, 也就是第  $s$  个计算样本;  $p_s$  为第  $s$  个样本对应的权重。在 DFTM 中,  $t_{i,s}$  的具体样本值为

$$t_{i,s} = \sqrt{2} \cos\left(2\pi \frac{si}{n}\right), \quad i=1, 2, \cdots, m; \quad s=1, 2, \cdots, n \quad (10)$$

或者

$$t_{i,s} = \sqrt{2} \sin\left(2\pi \frac{si}{n}\right), \quad i=1, 2, \cdots, m; \quad s=1, 2, \cdots, n \quad (11)$$

需要注意的是, 在一次 POPF 计算中, 所有的  $t_{i,s}$  都只能通过式(10)来取值; 或者所有的  $t_{i,s}$  都只能通过式(11)来取值。因此, 根据产生样本的具体公

式不同, DFTM 法可以进一步分为两种子方法: 把通过式(10)和式(11)得到的样本进行 POPF 计算的方法分别叫作离散余弦变换矩阵(Discrete cosine transformation matrix, DCTM)法和离散正弦变换矩阵(Discrete sine transformation matrix, DSTM)法。另外, 权重值  $p_s$  通过式(12)进行计算。

$$p_s = \frac{1}{n}, \quad s=1, 2, \cdots, n \quad (12)$$

步骤 3: 根据式(9)一式(12), 输出变量  $Y$  的均值与标准差可以通过式(13)进行计算。

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \sum_{s=1}^n p_s G(\mathbf{T}_s) \\ \sigma_Y &= \sqrt{\sum_{s=1}^n p_s G(\mathbf{T}_s)^2 - \mu_Y^2} \end{aligned} \quad (13)$$

## 2.3 DFTM 法基于 $2m+1$ 采样的样本特性研究

根据以往的研究, 近似法最常用的采点数量为  $2m+1$ , 如基于  $2m+1$  采点的洪氏点估计<sup>[26]</sup>和赵氏点估计<sup>[27]</sup>, 传统的 UTM 采点数量也是  $2m+1$ 。那么, 在使用  $2m+1$  个样本点的情况下, DFTM 法的计算量刚好与其他近似法的计算量持平。而 DFTM 法要求样本点个数需要大于随机变量个数。此时,  $2m+1 > m$  恒成立, 即基于  $2m+1$  个样本点的 DFTM 法总是符合样本点数量要求的。

对于 DCTM 法, 考察其前  $2m$  个样本, 其中第  $s_1$  个样本表示为

$$\mathbf{T}_{s_1} = \sqrt{2} \cos\left(2\pi \frac{s_1}{2m+1} \mathbf{M}\right), \quad s_1=1, 2, \cdots, m \quad (14)$$

$$\mathbf{M} = [1, 2, \cdots, 2m+1]^T$$

同理, 第  $s_2$  个样本可以表示为  $\mathbf{T}_{s_2}$ 。那么, 当  $s_1$  与  $s_2$  满足  $s_1 + s_2 = 2m+1$  时, 可以得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{s_1} &= \sqrt{2} \cos\left(2\pi \frac{s_1}{2m+1} \mathbf{M}\right) = \\ &= \sqrt{2} \cos\left(2\pi \frac{2m+1}{2m+1} \mathbf{M} - 2\pi \frac{s_2}{2m+1} \mathbf{M}\right) = \\ &= \sqrt{2} \cos\left(2\pi \frac{s_2}{2m+1} \mathbf{M}\right) = \mathbf{T}_{s_2} \end{aligned} \quad (15)$$

显而易见, 在  $2m+1$  采点法的情况下, DCTM 仅有  $m+1$  个不同的样本点, 确定性模型的实际计算量为  $m+1$  次。那么将其整理为  $m+1$  个采样点的形式, 其样本点如式(16)所示, 权重值如式(17)所示。

$$\mathbf{T}_{s, \text{DCTM}} = \begin{cases} \sqrt{2} \cos\left(2\pi \frac{sM}{2m+1}\right), & s=1, 2, \cdots, m \\ \sqrt{2} \cos(2\pi M), & s=m+1 \end{cases} \quad (16)$$

$$P_{s,DCTM} = \begin{cases} \frac{2}{2m+1}, & s=1,2,\dots,m \\ \frac{1}{2m+1}, & s=m+1 \end{cases} \quad (17)$$

对于 DSTM, 同样的可以得到式(18)。

$$\begin{aligned} T_{s_1} &= \sqrt{2} \sin\left(2\pi \frac{s_1}{2m+1} \mathbf{M}\right) = \\ &\sqrt{2} \sin\left(2\pi \frac{2m+1}{2m+1} \mathbf{M} - 2\pi \frac{s_2}{2m+1} \mathbf{M}\right) = \\ &-\sqrt{2} \sin\left(2\pi \frac{s_2}{2m+1} \mathbf{M}\right) = -T_{s_2} \end{aligned} \quad (18)$$

并且其第  $2m+1$  个样本是一个元素全为 0 的向量。因此, DSTM 法在  $2m+1$  采样的情况下, 它的样本总是对称分布的。

为了避免引起歧义, 用“基于  $n$  采样”表示式(10)和式(11)中的采样点个数为  $n$ , 即“基于  $2m+1$  采样”和“基于  $m+1$  采样”分别表示  $n=2m+1$  和  $n=m+1$ ; 用“实际样本点个数为  $m+1$ ”表示 DCTM 法在基于  $2m+1$  采样时, 实际使用的不同的样本点个数为  $m+1$  个。

### 3 基于 DFTM 法的 POPF 算法流程

本节主要将上节中所提出的概率方法跟 DOPF 模型相结合, 得到了新的 POPF 计算方法。

根据之前的讨论, DFTM 法可以细分为 DCTM 法和 DSTM 法, 并且这两种子方法在基于  $2m+1$  采样的情况下表现出了不同的特性。尽管如此, 其算法步骤仍然是一致的, 具体的基于  $2m+1$  采样的 DFTM 法的 POPF 算法流程如图 1 所示。

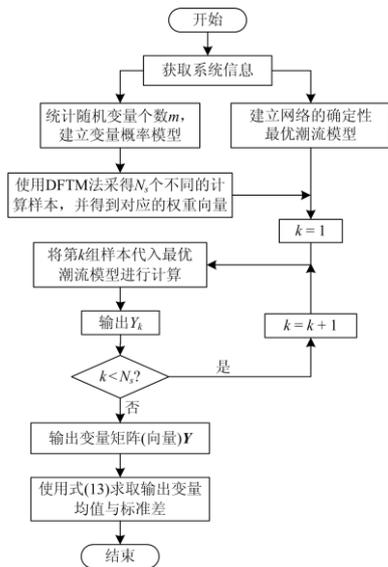


图 1 基于 DFTM 法的 POPF 算法流程图

Fig. 1 Procedure of POPF calculation based on DFTM method

按照图 1, 便可以实现基于 DFTM 法的 POPF 计算。每一次确定性的最优潮流计算所消耗的时间被认为是近似相等的, 且每一个样本点都需要进行一次确定性最优潮流计算。因此, 可以认为该过程消耗的时间与样本点数量基本呈线性关系。

## 4 算例分析

### 4.1 算例介绍

本文将基于 IEEE 118 节点算例, 接入与文献[22]中完全相同的风电设备, 所有风电场的风速均服从分布参数为 10.7 和 3.97 的 Weibull 分布。原始算例中所有有功负荷均考虑成随机变量, 按照其所在节点顺序分为两组, 分别含有负荷 50 个和 49 个, 记作 G1 和 G2。所有有功负荷均服从正态分布, 均值等于算例中的原始值, 标准差为均值的 0.015 倍。

相关系数设定方面, 风速之间的相关系数完全与文献[22]相同, G1 和 G2 各自内部变量之间的相关系数为 0.8, G1 中变量和 G2 中变量以及它们与风速之间的相关系数为 0。

在以上的设定下, 本文使用基于 10 000 个简单随机样本的 MCSM 作为参考方法, 用其 POPF 结果来测试基于 DFTM 的 POPF 计算方法的正确性。另外, 为了体现本文方法的优越性, 还将其结果与 UTM 的计算结果进行对比。本文所有实验均在 Matlab 实验平台上进行, 并基于 Matpower 程序包实现。另外, 本文用相对误差来描述计算结果的精确度, 其值越小说明该结果越精确, 其具体计算方法如式(19)所示。

$$\varepsilon_R = \left| \frac{R_{MCSM} - R_{tested}}{R_{MCSM}} \right| \times 100\% \quad (19)$$

式中:  $\varepsilon_R$  表示输出变量  $R$  的相对误差;  $R_{MCSM}$  和  $R_{tested}$  分别代表 MCSM 和待考察方法的计算结果。

### 4.2 初步结果的对比与分析

在所设定算例中, 使用 MCSM、基于  $2m+1$  采样的 DCTM 法和 DSTM 法, 以及 UTM, 分别进行 POPF 计算, 其计算结果如表 2 所示。其中所考察的输出变量为目标函数(即发电成本), 考察的概率信息为输出变量的均值与标准差。

表 2 基于 DCTM 和 DSTM 的 POPF 计算结果

Table 2 Results of DCTM and DSTM based POPF

方法	目标函数误差/%		计算时间/s
	均值	标准差	
MCSM	—	—	219.791 3
DCTM	0.012 8	0.220 3	2.635 0
DSTM	0.012 7	0.036 0	5.244 9
UTM	0.010 7	14.259 6	5.114 7

根据表 2 的结果,从计算精度上看,无论是 DCTM 法还是 DSTM 法,都能够非常精确地对 POPF 的目标函数的均值与标准差进行求解,其结果误差均小于 1%。同时,相较于 DCTM 法,DSTM 法的结果的精度略有优势。其原因应该是在基于  $2m+1$  采样的情况下,DSTM 实际使用的不同的样本点数量更多。另外,UTM 仅能精确地求取目标函数的均值,对其标准差的计算结果精度非常低,无法满足实际应用的要求。

计算时间方面,对于 DCTM 法,由于在基于  $2m+1$  采样的情况下,其只需要对  $m+1$  个不同的样本进行计算,所需时间约为 DSTM 法的一半。但是相比于参考方法 MCSM,其余方法耗时均大大减少。究其原因,在于这三种方法的样本数量远远小于参考方法所取样本数。

总体而言,DCTM 法和 DSTM 法计算结果精确度高,计算速度非常快;同时,DCTM 法由于实际使用样本点数少,计算速度相比 DSTM 更有优势;而 DSTM 法由于实际使用的样本点数多,计算结果精度比 DCTM 法更高;另外,在 POPF 的计算中,UTM 对结果的标准差的求解精度较低。

### 4.3 同等计算量下 DCTM 与 DSTM 的精度对比测试

通过以上的探究发现,在基于  $2m+1$  采样的情况下,DCTM 和 DSTM 两种方法均在较高精度下完成了 POPF 计算。但是相比 DSTM 的精度优势,DCTM 的速度优势更为明显。考虑到 DSTM 同样可以基于  $m+1$  采样来获取样本点矩阵,可以达到与 DCTM 同样的计算速度水平。在这样的设定下,基于  $2m+1$  采样的 DCTM 法和基于  $m+1$  采样的 DSTM 法的 POPF 计算结果如表 3 所示。

表 3 基于 DCTM 和 DSTM 的 POPF 计算误差

方法	目标函数误差/%		计算时间/s
	均值	标准差	
DCTM	0.012 8	0.220 3	2.635 0
DSTM	0.012 9	3.526 3	2.519 1

根据表 3 的结果,可以清楚地发现:在近乎相同的计算量情况下,DCTM 的计算精度明显要高于 DSTM,尤其是目标函数的标准差,DSTM 的结果误差已经大于 3%。

结合 4.2 节和本节的结果来看,总体而言 DFTM 法能够较好地应用于 POPF 的计算与分析。对于 DFTM 的两种具体的方法而言,基于  $2m+1$  采样的条件下,DCTM 的计算性能更胜一筹,主要体现在:基于相同采样点个数(例如均为基于  $2m+1$  采样的)的情况下,DCTM 的计算时间大约只有 DSTM 的一

半,且两者精度都非常之高,DSTM 有略微精度优势;而在相同计算量的代价下,即 DSTM 基于  $m+1$  采样进行计算,DCTM 结果的精度有明显优势。

### 4.4 随机变量边缘分布对称性对 DFTM 性能的影响

基于以上结果,初步表明 DCTM 的性能略好于 DSTM。但是问题在于,算例所设置的变量的分布类型绝大多数是正态分布,这是一类具有对称性的分布。而在基于  $2m+1$  采样时,有  $m$  对样本点两两相同,DCTM 的采得的样本点是非对称的。在从标准高斯域还原到原始域的时候,即使非对称的样本点只能携带分布单侧的信息,由于分布的对称性,样本点携带的信息依然较为完整。而在基于  $2m+1$  采样的条件下,DSTM 的样本点本身是关于中心点对称的样本,无论原始分布是否对称,其都能够携带分布两侧的信息。理论上讲,在基于  $2m+1$  采样的条件下,DSTM 法能够更好地处理含有较多非对称分布随机变量的场景。

假设所有负荷都满足如式(20)的设定。

$$P_L = W + ORI \quad (20)$$

式中: $P_L$ 是有功负荷值; $W$ 是一个服从 Weibull 分布的随机变量,其分布参数同 4.1 节中风速所服从分布的参数完全相同; $ORI$ 是该有功负荷对应的原始算例中的有功负荷的确定值。整个算例其他设定完全不变,此时,算例中所有随机变量所服从的概率分布都是非对称的。

将 4.2 节和 4.3 节算例的设定用 S1 表示,本节算例设定用 S2 表示。基于  $2m+1$  采样的 DCTM 法和 DSTM 法(用 DSTM1 表示)和基于  $m+1$  采样的 DSTM 法(用 DSTM2 表示)的 POPF 计算结果的误差如图 2 所示。

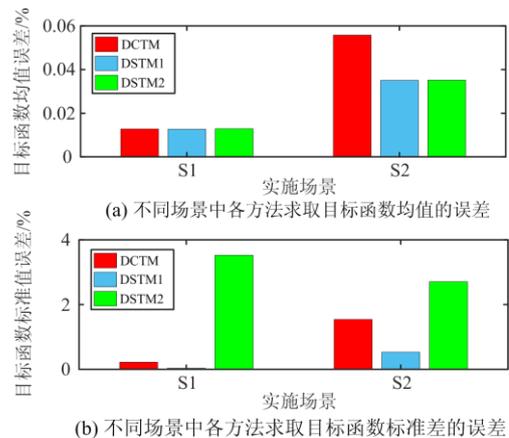


图 2 分别在 S1 和 S2 场景中 DFTM 的 POPF 输出结果

Fig. 2 Results of DFTM method based POPF calculation in S1 and S2

从图2中明显可以看到,在所有随机变量都服从的非对称分布(即 Weibull 分布)时,DFTM 法的结果的精确度会明显降低。但是在基于  $2m+1$  采样的情况下,DCTM 法和 DSTM 法的精度依然非常高:均值误差均小于 1%,标准差误差均小于 2%。不过 DCTM 法的误差明显要大于 DSTM 法。

同时,当输入变量全为非对称分布时,在同样计算量的水平上,即 DCTM 法基于  $2m+1$  采样,DSTM 基于  $m+1$  采样,对于目标函数均值的计算两者都非常精确,表现在其均值误差均小于 1%,且 DSTM 法(即图中 DSTM2)精度略高。与在 S1 中的结果相同,在求取目标函数方差时,S2 中基于  $m+1$  采样的 DSTM 法的精度明显低于 DCTM 法。

总之,通过本节实验结果,无论非对称分布变量占比高低,基于  $2m+1$  采样的两种 DFTM 法,都能够精确而快速地对 POPF 的目标函数的均值与标准差进行估计。但是就图2的结果来看,在非对称分布增加后,DCTM、DSTM1 和 DSTM2 均值误差分别增加了 0.0430%, 0.0224% 和 0.0223%;标准差误差分别增加了 1.3216%, 0.4938% 和 -0.8187%。基于  $2m+1$  采样时,DSTM 法的误差增高幅度明显小于 DCTM 法,表明 DSTM 法对随机变量分布对称性有更好的鲁棒性,这很好地印证了本节开头部分的猜想。

## 5 结论

本文将离散傅里叶变换矩阵法(DFTM)首次引入到了电力系统概率最优潮流的计算分析中。通过实验测试,得到的基本结论如下:

1) 总体而言,在基于  $2m+1$  采样时,DFTM 法能够精确地对 POPF 的目标函数的均值与标准差进行估计。与现有的近似法—UTM 相比,DFTM 法对目标函数的标准差的计算精度明显更高。对于 DFTM 法下属的两种子方法,DCTM 和 DSTM,在不同场景中进行 POPF 计算的性能各有所长。

2) 在含有更多对称分布变量的情况下,DCTM 一方面能够精确地完成 POPF 计算,同时由于其采样的特殊性,在基于  $2m+1$  采样时,实际需要计算的样本数量仅有  $m+1$  个,相比于相同采样点数的 DSTM 法和其他近似法(如本文对比的 UTM)减少了将近一半的计算时间。

3) 在含有更多的非对称分布的变量的情况下,DCTM 法的计算精度下降幅度相对较大,不过结果依然较为精确。但在同样的条件下,DSTM 法通过对称采样可以同时携带分布两侧的信息,在传递到原始分布域后很好地保留了变量的概率特征。这使

得 DSTM 法在处理含有大量非对称分布随机变量的场景时,精度也非常高。

## 参考文献

- [1] REN21 renewable energy policy network for the 21st century: renewables 2019 global status report[EB/OL]. www.ren21.net/gsr-2019/.
- [2] AIEN M, FOTUHI-FIRUZABAD M, RASHIDINEJAD M. Probabilistic optimal power flow in correlated hybrid wind-photovoltaic power systems[J]. IEEE Transactions on Smart Grid, 2014, 5(1): 130-138.
- [3] MA Zhaoxing, CHEN Hao, CHAI Yanli. Analysis of voltage stability uncertainty using stochastic response surface method related to wind farm correlation[J]. Protection and Control of Modern Power Systems, 2017, 2(3): 211-219. DOI: 10.1186/s41601-017-0051-3.
- [4] 代景龙,白晓清,鲍海波.考虑源荷不确定性的概率最优潮流[J].现代电力,2016,33(1):34-40.  
DAI Jinglong, BAI Xiaoqing, BAO Haibo. Probabilistic optimal power flow by considering the uncertainty of source and demand side[J]. Modern Electric Power, 2016, 33(1): 34-40.
- [5] LI Xue, CAO Jia, DU Dajun. Probabilistic optimal power flow for power systems considering wind uncertainty and load correlation[J]. Neurocomputing, 2015, 148: 240-247.
- [6] 杨欢,邹斌.含相关性随机变量的概率最优潮流问题的蒙特卡罗模拟方法[J].电力系统保护与控制,2012,40(19):110-115.  
YANG Huan, ZOU Bin. A Monte Carlo simulation method for probabilistic optimal power flow with correlated stochastic variables[J]. Power System Protection and Control, 2012, 40(19): 110-115.
- [7] 李泳泉.含风电场概率最优潮流的拟蒙特卡洛算法[J].电力与能源,2018,39(2):221-226.  
LI Yongquan. Quasi Monte Carlo algorithm for probabilistic optimal power flow with wind farm[J]. Power & Energy, 2018, 39(2): 221-226.
- [8] XIE Z Q, JI T Y, LI M S, et al. Quasi-Monte Carlo based probabilistic optimal power flow considering the correlation of wind speeds using Copula function[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2018, 33(2): 2239-2247.
- [9] 章晨璐,赵晋泉,罗卫华,等.一种基于拉丁超立方采样的概率最优潮流算法[J].科学技术与工程,2014,14(14):49-53,59.  
ZHANG Chenlu, ZHAO Jinquan, LUO Weihua, et al. A probabilistic optimal power flow calculation method with Latin Hypercube sampling[J]. Science Technology and Engineering, 2014, 14(14): 49-53, 59.
- [10] 毛锐,袁康龙,钟杰峰,等.基于概率潮流法的含分布式光伏的配电网电压状态评估[J].电力系统保护与控制,2019,47(2):123-130.

- MAO Rui, YUAN Kanglong, ZHONG Jiefeng, et al. Distribution network voltage state assessment with distributed generation based on probabilistic power flow method[J]. Power System Protection and Control, 2019, 47(2): 123-130.
- [11] 刘小团, 赵晋泉, 罗卫华, 等. 基于 TPNT 和半不变量法的考虑输入量相关性概率潮流算法[J]. 电力系统保护与控制, 2013, 41(22): 13-18.
- LIU Xiaotuan, ZHAO Jinquan, LUO Weihua, et al. A TPNT and cumulants based probabilistic load flow approach considering the correlation variables[J]. Power System Protection and Control, 2013, 41(22): 13-18.
- [12] 潘雄, 周明, 孔晓民, 等. 风速相关性对最优潮流的影响[J]. 电力系统自动化, 2013, 37(6): 37-41.
- PAN Xiong, ZHOU Ming, KONG Xiaomin, et al. Impact of wind speed correlation on optimal power flow[J]. Automation of Electric Power Systems, 2013, 37(6): 37-41.
- [13] 潘炜, 刘文颖, 杨以涵. 概率最优潮流的点估计算法[J]. 中国电机工程学报, 2008, 28(16): 28-33.
- PAN Wei, LIU Wenyong, YANG Yihan. Point estimate method for probabilistically optimal power flow computation[J]. Proceedings of the CSEE, 2008, 28(16): 28-33.
- [14] 毛晓明, 叶嘉俊. 主元分析结合 Cornish-Fisher 展开的概率潮流三点估计法[J]. 电力系统保护与控制, 2019, 47(6): 66-72.
- MAO Xiaoming, YE Jiajun. A three-point estimate method for probabilistic load flow computation based on principal component analysis and Cornish-Fisher series[J]. Power System Protection and Control, 2019, 47(6): 66-72.
- [15] 李俊, 邓大上, 房鑫炎, 等. 考虑电压稳定裕度约束的点估计随机最优无功调度方法[J]. 电工技术学报, 2015, 30(7): 27-33.
- LI Jun, DENG Dashang, FANG Xinyan, et al. Stochastic optimal reactive power dispatch method based on point estimation considering voltage stability margins[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2015, 30(7): 27-33.
- [16] 罗家勇, 鲍海波, 郭小璇. 计及风电场风速相关性的概率最优潮流计算[J]. 广西电力, 2014, 37(1): 13-17.
- LUO Jiayong, BAO Haibo, GUO Xiaoxuan. Calculation of probabilistic optimal power flow considering wind speed correlation of wind farm[J]. Guangxi Electric Power, 2014, 37(1): 13-17.
- [17] SAUNDERS C S. Point estimate method addressing correlated wind power for probabilistic optimal power flow[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2014, 29(3): 1045-1054.
- [18] 鲍海波, 韦化. 基于无迹变换的含大规模风电场电力系统概率最优潮流计算[J]. 电力系统自动化, 2014, 38(12): 46-53.
- BAO Haibo, WEI Hua. Probabilistic optimal power flow computation in power systems including large-scale wind farms based on unscented transformation[J]. Automation of Electric Power Systems, 2014, 38(12): 46-53.
- [19] AIEN M, RASHIDINEJAD M, FOTUHI-FIRUZABAD M. Probabilistic optimal power flow in correlated hybrid wind-PV power systems: a review and a new approach[J]. Renewable and Sustainable Energy Reviews, 2015, 41: 1437-1446.
- [20] XIAO Q, ZHOU S. Probabilistic power flow computation using quadrature rules based on discrete Fourier transformation matrix[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2019, 104: 472-480.
- [21] ZIMMERMAN R D, MURILLO-SANCHEZ C E, THOMAS R J. MATPOWER: steady-state operations, planning and analysis tools for power systems research and education[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2011, 26(1): 12-19.
- [22] 肖青, 周少武. 基于改进降维法的概率潮流计算[J]. 电网技术, 2018, 42(5): 1565-1575.
- XIAO Qing, ZHOU Shaowu. Probabilistic load flow calculation based on improved dimension reduction method[J]. Power System Technology, 2018, 42(5): 1565-1575.
- [23] KUROWICKA D, COOKE R M. Uncertainty analysis with high dimensional dependence modelling[M]. John Wiley & Sons, 2006.
- [24] LIU P L, DER K A. Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 1986, 1(2): 105-112.
- [25] XIAO Q. Evaluating correlation coefficient for Nataf transformation[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2014, 37: 1-6.
- [26] MORALES J M, PEREZ-RUIZ J. Point estimate schemes to solve the probabilistic power flow[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2007, 22(4): 1594-1601.
- [27] ZHAO Y G, TETSURO O. New point estimates for probability moments[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2000, 126(4): 433-436.

收稿日期: 2020-02-22; 修回日期: 2020-03-26

作者简介:

许丹(1985—), 男, 硕士, 高级工程师, 研究方向为电力系统节能经济调度; E-mail: xudan@epri.sgcc.com.cn

丁强(1981—), 男, 硕士, 高级工程师, 研究方向为电力系统节能经济调度; E-mail: dingqiang@epri.sgcc.com.cn

林星宇(1994—), 男, 博士研究生, 研究方向为电力系统不确定性分析与计算。E-mail: linxingyu@cqu.edu.cn

(编辑 姜新丽)