

基于高斯方法及 Sherman-Morrison 公式的 暂态稳定性并行计算方法

廖小兵, 汪芳宗, 杨萌

(三峡大学电气与新能源学院, 湖北 宜昌 443002)

摘要: 并行计算是实现大规模电力系统暂态稳定性实时分析计算的有效途径。将 s 级 $2s$ 阶的高斯方法和扩展的 Sherman-Morrison 矩阵求逆公式相结合, 提出了一类新的暂态稳定性并行计算方法。该方法首先利用 s 级 $2s$ 阶的高斯方法对微分-代数方程组进行多级离散, 并利用严格的牛顿法对离散后的非线性方程组进行整体求解。在此基础上, 按 s 个时间点将整体雅可比矩阵分裂成为一个分块对角矩阵和一个分块常数系数矩阵。然后, 以分裂后的分块对角矩阵为基础, 利用扩展的 Sherman-Morrison 矩阵求逆公式将 s 个时间点上的计算任务进行“解耦”。所提方法在保持严格牛顿法的收敛性的同时具有很好的并行性。利用 OpenMP 并行计算技术在多核计算机上对 2 个不同的系统算例进行了测试, 结果表明, 所提出的并行方法可以获得较好的加速比以及并行效率。

关键词: 暂态稳定性; 并行计算; 高斯方法; Sherman-Morrison 公式; OpenMP

Parallel algorithm for transient stability simulation using Gauss method and Sherman-Morrison formula

LIAO Xiaobing, WANG Fangzong, YANG Meng

(College of Electrical Engineering & New Energy, China Three Gorges University, Yichang 443002, China)

Abstract: Parallel computing is an effective approach to transient stability real-time simulation of large-scale power system. A new parallel algorithm for power system transient stability simulation is proposed by combining Gauss integration method and the extended Sherman-Morrison formula. The algorithm adopts the s -stage $2s$ -order Gauss method to convert the differential-algebraic equations into a set of nonlinear algebraic equations by multi-stages discretization, while the algebraic system is solved using rigorous Newton method. On this basis, the whole Jacobian matrix involved in Newton method is splitted to a block diagonal matrix and a block constant coefficients matrix according to s time points, and then based on the block diagonal matrix, the computing tasks at s time points are fully decoupled through the extended Sherman-Morrison matrix inverse formula. The proposed algorithm preserves the good convergence of rigorous Newton method and meanwhile has a high degree of parallelism both in time and in space. For test, the proposed algorithm has been implemented on a multi-core computer by use of OpenMP technology, and the results for two example systems show that the proposed parallel algorithm can obtain effective speedup and parallel efficiency.

This work is supported by National Natural Science Foundation of China (No. 51377098 and No. 50977052).

Key words: transient stability; parallel computation; Gauss method; Sherman-Morrison formula; OpenMP

0 引言

并行计算是实现大规模电力系统暂态稳定性实时分析计算的有效途径^[1-2]。并行计算的基本思路是将一个复杂的计算任务分解成为多个较为独立的子

任务, 而后将其分配给不同的计算节点, 以此实现多个子任务的并行计算。迄今为止, 有关电力系统暂态稳定性的并行计算, 已有众多的研究成果^[3-7]。概括起来, 所提出的并行计算方法大致可以分为 3 类: 空间并行^[3-4]、时间并行^[5-6]以及时间-空间并行。空间并行计算主要是基于网络分割、矩阵分块或矩阵分裂思想, 属于粗粒度并行方法, 另外一类是基于

矢量并行计算的细粒度空间并行方法。关于粗粒度空间并行,已有较多的研究成果,而随着GPU (Graphics Processing Unit)并行计算技术的兴起,细粒度空间并行方法也在电力系统并行计算中得到了应用^[7-8]。

时间并行的基本思路是利用数值积分方法同时在多个时间点上进行求解。很易理解,时间并行属于粗粒度并行方法。尽管利用传统的单步或单级数值积分方法,例如隐式梯形积分方法,也可以在多个时间点上同时进行求解,但严格地讲,传统的单步或单级数值积分方法其本身并不具备时间并行特性。相比较而言,多级隐式 Runge-Kutta(RK)系列方法^[9-11]则具有内在的时间并行特性^[12]。事实上,多级隐式 RK 系列方法具有 2 个重要的优点:此类方法均具有很好的数值稳定性,(至少)是 A-稳定的;随着级数的增加,此类方法的阶数也同比增大,因而即使在采用大步长的情况下也可以获得较高的计算精度。因此,将多级高阶隐式 RK 方法用于暂态稳定性的时间并行计算,是一种自然、可行的思路。

将多级高阶隐式 RK 方法用于暂态稳定性的并行计算,所需解决的主要问题是有效地如何将多个时间点上的计算任务进行“解耦”。为此,文献[13]利用多级高阶隐式 RK 方法的加权系数矩阵满足 V -变换和 W -变换的特性,分别提出了基于 V -变换和 W -变换的暂态稳定性并行计算方法,较好地解决了“解耦”问题。然而,这两类并行算法的计算公式比较繁琐,并行编程难度较大。

在上述研究工作的基础上,本文将 s 级 $2s$ 阶的高斯方法(Gauss method)与扩展的 Sherman-Morrison 矩阵求逆公式^[14]巧妙地结合起来,提出了一类新的暂态稳定性并行计算方法。该方法在保持严格牛顿法的收敛性的同时,具有很好的并行特性,而且易于并行编程。

1 高斯数值积分方法简介

多级 RK 系列方法^[9-10]是常微分方程初值问题计算中极为重要的一类数值积分方法。对给定的常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), & 0 < t \leq T \\ \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (1)$$

其 s 级的 RK 方法的通用表达式为

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{f}(t_n + c_j h, \tilde{\mathbf{x}}_j), & i \in (1, s) \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h \sum_{j=1}^s b_j \mathbf{f}(t_n + c_j h, \tilde{\mathbf{x}}_j) \end{cases} \quad (2)$$

式中: a_{ij}, b_i 为积分权系数,它们满足 $\sum_{j=1}^s a_{ij} = c_i$,

$\sum_{j=1}^s b_j = 1$; $c_i, i \in (1, s)$ 称为内节点或积分零点,它们是有顺序的,即 $0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_s \leq 1$; $\tilde{\mathbf{x}}_i \approx \mathbf{x}(t_n + c_i h)$ 是状态变量在内节点 c_i 处的近似值,通常称为内点。

上述 RK 方法也可用 Butcher 表格(Butcher Table)^[11]来表示,即

$$\begin{array}{c|ccc} & c_1 & \dots & c_s \\ \mathbf{A} & a_{11} & \dots & a_{1s} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{b}^T & a_{s1} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \dots & b_s \end{array} \quad (3)$$

显然,当 $a_{ij} = 0, j \geq i$ 时,多级 RK 方法(3)是显式 RK 方法,否则它是隐式方法。本文主要涉及多级隐式 RK 方法。

依据所选用的积分多项式以及相应的积分零点的不同,多级隐式 RK 方法主要包括 3 个系列的方法: s 级 $2s$ 阶的 Gauss 系列方法; s 级 $2s-1$ 阶的 Radau 系列方法; s 级 $2s-2$ 阶的 Lobatto 系列方法。显然, Gauss 系列方法是多级隐式 RK 方法簇中可达阶数最高的一类数值积分方法。

附录中给出了 3 级($s=3$)和 5 级($s=5$)的 Gauss 方法的 Butcher 表。

Gauss 方法具有众多的优点。研究人员很早就已证明: s 级的 Gauss 方法是 A-稳定的。熟知: A-稳定的方法比较适合于刚性微分系统的数值计算,但 A-稳定性属于线性稳定性的范畴。关于非线性稳定性,研究人员已证明: Gauss 方法是 B-稳定^[9]的,也就是代数稳定的^[9,15]。B-稳定或代数稳定性的定义或要求比较苛刻, B-稳定的数值积分方法肯定是 A-稳定的,但大多数 A-稳定的方法并不是 B-稳定的。Gauss 方法除具备上述特点外,研究人员还发现或证明: Gauss 系列方法是 s 级 $2s$ 阶的辛方法(symplectic method)^[16]。关于辛方法,其原创者冯康先生已证明:相对于传统的非辛算法,辛方法在长时间数值跟踪稳定性等方面具有独特的优势^[16]。

2 基于高斯方法的暂态稳定性计算格式

Gauss 方法具有众多的优点,因此,将 Gauss 方法应用于电力系统暂态稳定性数值计算应该是一个合理的选择。本节具体描述基于 Gauss 方法的暂态稳定性数值计算的算法基本框架。

熟知,暂态稳定性计算的数学模型可以用如式(4)的微分-代数方程组来描述。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{V}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{V}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4)$$

式中: \mathbf{x} 为描述系统动态特性的状态变量; \mathbf{V} 为网络节点电压向量。

将 s 级的 Gauss 方法应用于方程(4)中的微分方程可得

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_j, \tilde{\mathbf{V}}_j), i \in (1, s) \quad (5)$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h \sum_{j=1}^s b_j \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_j, \tilde{\mathbf{V}}_j) \quad (6)$$

方程(5)即是所谓的内点方程, 定义

$$\tilde{\mathbf{z}}_i = \tilde{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_n, \mathbf{q} = \mathbf{A}^{-1} \equiv (q_{ij}), i, j \in (1, s) \quad (7)$$

$$\mathbf{d}^T = [d_1, d_2, \dots, d_s] = \mathbf{b}^T \mathbf{q} \quad (8)$$

则方程(5)和方程(6)可以分别写成

$$\sum_{j=1}^s q_{ij} \tilde{\mathbf{z}}_j - h \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{z}}_i + \mathbf{x}_n, \tilde{\mathbf{V}}_i) = \mathbf{0}, i \in (1, s) \quad (9)$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h \sum_{j=1}^s d_j \tilde{\mathbf{z}}_j \quad (10)$$

将方程(9)与方程(4)中的网络方程联立可得

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^s q_{ij} \tilde{\mathbf{z}}_j - h \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{z}}_i + \mathbf{x}_n, \tilde{\mathbf{V}}_i) = \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{z}}_i + \mathbf{x}_n, \tilde{\mathbf{V}}_i) = \mathbf{0} \end{cases} i \in (1, s) \quad (11)$$

定义

$$\begin{cases} \tau_i = \frac{\partial \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{z}}_i + \mathbf{x}_n, \tilde{\mathbf{V}}_i)}{\partial \tilde{\mathbf{z}}_i} \\ \mu_i = \frac{\partial \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{z}}_i + \mathbf{x}_n, \tilde{\mathbf{V}}_i)}{\partial \tilde{\mathbf{V}}_i} \\ \sigma_i = \frac{\partial \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{z}}_i + \mathbf{x}_n, \tilde{\mathbf{V}}_i)}{\partial \tilde{\mathbf{z}}_i} \\ \eta_i = \frac{\partial \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{z}}_i + \mathbf{x}_n, \tilde{\mathbf{V}}_i)}{\partial \tilde{\mathbf{V}}_i} \end{cases} i \in (1, s) \quad (12)$$

$$\begin{cases} \nabla \mathbf{f}_i = h \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{z}}_i + \mathbf{x}_n, \tilde{\mathbf{V}}_i) - \sum_{j=1}^s q_{ij} \tilde{\mathbf{z}}_j \\ \nabla \mathbf{g}_i = -\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{z}}_i + \mathbf{x}_n, \tilde{\mathbf{V}}_i) \end{cases} i \in (1, s) \quad (13)$$

$$\nabla \mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \nabla \mathbf{f}_i \\ \nabla \mathbf{g}_i \end{bmatrix}, \Delta \mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} \Delta \tilde{\mathbf{z}}_i \\ \Delta \tilde{\mathbf{V}}_i \end{bmatrix}, i \in (1, s) \quad (14)$$

则利用严格的牛顿法对联立方程组(11)进行求解可得

$$\mathbf{J} \Delta \mathbf{X} = \nabla \mathbf{F} \quad (15)$$

式中:

$$\Delta \mathbf{X} = [\Delta \mathbf{w}_1 \ \dots \ \Delta \mathbf{w}_s]^T \quad (16)$$

$$\nabla \mathbf{F} = [\nabla \mathbf{H}_1 \ \dots \ \nabla \mathbf{H}_s]^T \quad (17)$$

\mathbf{J} 可以称为整体雅可比矩阵, 其表达式可以写成

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_d + \Delta \mathbf{J} \quad (18)$$

$$\mathbf{J}_d = \text{diag}(\mathbf{J}_i) \quad i \in (1, s) \quad (19)$$

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} q_{ii} \mathbf{I}_m - h \boldsymbol{\tau}_i & -h \boldsymbol{\mu}_i \\ \boldsymbol{\sigma}_i & \boldsymbol{\eta}_i \end{bmatrix} \quad i \in (1, s) \quad (20)$$

$$\Delta \mathbf{J} = [\Delta \tilde{\mathbf{J}}_{ij}], \quad i, j \in (1, s) \quad (21)$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{J}}_{ii} = \mathbf{0}; \Delta \tilde{\mathbf{J}}_{ij} = \begin{bmatrix} q_{ij} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad i \neq j \quad (22)$$

式中: m 为状态变量 \mathbf{x} 的维数; \mathbf{I}_m 为 m 维的单位矩阵。

从上述表达式可以看出: 分块雅可比矩阵 $\mathbf{J}_i, i \in (1, s)$ 与经典的隐式联立求解法^[17]中的雅可比矩阵极为相似, 而 $\Delta \mathbf{J}$ 是一个分块常系数矩阵。若依据传统的方法对方程(15)进行整体求解, 则这样将导致极低的计算效率, 因为雅可比矩阵 \mathbf{J} 的维数是经典的隐式联立求解法^[17]中的雅可比矩阵的维数的 s 倍。若忽略 $\Delta \mathbf{J}$, 则方程(15)的求解可以按 s 个时间点完全“解耦”, 亦即方程(15)的求解具有 s 个时间并行度, 但这显然是不合理的。事实上, $\Delta \mathbf{J}$ 主要是反映或体现不同内点($\tilde{\mathbf{z}}_i, \tilde{\mathbf{V}}_i, i \in (1, s)$)相互之间的“耦合效应”。如何对 $\Delta \mathbf{J}$ 导致的“耦合效应”进行“解耦”, 以便按多个时间点对方程(15)进行并行计算, 这是时间并行类方法所面临的主要问题。

3 基于 Sherman-Morrison 公式的暂态稳定性并行计算方法

如上所述, 为有效实现方程(15)的并行求解, 需要对由 $\Delta \mathbf{J}$ 导致的“耦合效应”进行“解耦”。为此, 本节具体描述基于扩展的 Sherman-Morrison 公式的“解耦”方法。

经典的 Sherman-Morrison 公式可概述为

$$(\mathbf{A}_0 + \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}^T)^{-1} = \mathbf{A}_0^{-1} - \frac{\mathbf{A}_0^{-1} \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{A}_0^{-1}}{1 + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{A}_0^{-1} \boldsymbol{\alpha}} \quad (23)$$

式中: $\mathbf{A}_0 \in R^{n \times n}$; $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in R^{n \times 1}$ 。文献[14]对经典的 Sherman-Morrison 公式进行了扩展, 导出了更为通用的、扩展的 Sherman-Morrison 公式, 即

$$(\mathbf{A}_0 + \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\alpha}_k \boldsymbol{\beta}_k^T)^{-1} = \mathbf{A}_0^{-1} - \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{P} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{A}_0^{-1} \quad (24)$$

式中:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\beta}_k &\in R^{n \times 1}, k \in (1, n) \\ \mathbf{P} &= [\mathbf{p}_k], \mathbf{p}_k \in R^{n \times 1}, k \in (1, n) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_k], \quad \mathbf{q}_k \in R^{n \times 1}, k \in (1, n) \quad (26)$$

$$\mathbf{R} = \text{diag}(r_k), \quad k \in (1, n) \quad (27)$$

$$\begin{cases} \mathbf{p}_k = \boldsymbol{\alpha}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\mathbf{q}_i^T \mathbf{A}_0^{-1} \boldsymbol{\alpha}_k}{r_i} \mathbf{p}_i \\ \mathbf{q}_k = \boldsymbol{\beta}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{p}_i}{r_i} \mathbf{q}_i \end{cases}, \quad k \in (1, n) \quad (28)$$

$$r_k = 1 + \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{p}_k = 1 + \mathbf{q}_k^T \mathbf{A}_0^{-1} \boldsymbol{\alpha}_k, \quad k \in (1, n) \quad (29)$$

设分块雅可比矩阵 \mathbf{J}_i 的维数为 ν , 则整体雅可比矩阵 \mathbf{J} 的维数为 $s \times \nu$ 。定义 $s \times \nu$ 维的向量 $\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k \in R^{(s \times \nu) \times 1}$ 。令

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_{s \times m}] \quad (30)$$

$$\mathbf{Y}^T = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_{s \times m}] \quad (31)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} & & & \\ & \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{y}}_{12} & \cdots & \tilde{\mathbf{y}}_{1s} \\ \tilde{\mathbf{y}}_{21} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{y}}_{23} & \vdots \\ \vdots & & & \tilde{\mathbf{y}}_{s-1,s} \\ \tilde{\mathbf{y}}_{s1} & \cdots & \tilde{\mathbf{y}}_{s,s-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_{ij} = (\mathbf{q}_{ij}^T \mathbf{I}_m \quad \mathbf{0}), \quad i, j \in (1, s) \quad (34)$$

$$\sum_{k=1}^{s \times m} \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T = \mathbf{U} \mathbf{Y} \quad (35)$$

则有

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_d + \sum_{k=1}^{s \times m} \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T \quad (36)$$

在上述基础上, 将扩展的 Sherman-Morrison 矩阵求逆公式应用于方程(15)可得

$$\Delta \mathbf{X} = \Delta \tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{J}_d^{-1} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}^T \Delta \tilde{\mathbf{X}} \quad (37)$$

式中:

$$\Delta \tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_d^{-1} \nabla \mathbf{F} = [\Delta \tilde{\mathbf{w}}_1 \quad \cdots \quad \Delta \tilde{\mathbf{w}}_s]^T \quad (38)$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{w}}_k = \mathbf{J}_k^{-1} \nabla \mathbf{H}_k, \quad k \in (1, s) \quad (39)$$

$$\tilde{\mathbf{P}} = [\tilde{\mathbf{p}}_k], \quad \tilde{\mathbf{Q}} = [\tilde{\mathbf{q}}_k], \quad k \in (1, s \times m) \quad (40)$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = \text{diag}(\tilde{r}_k), \quad k \in (1, s \times m) \quad (41)$$

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{p}}_k = \mathbf{u}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\tilde{\mathbf{q}}_i^T (\mathbf{J}_d^{-1} \mathbf{u}_k)}{r_i} \tilde{\mathbf{p}}_i \\ \tilde{\mathbf{q}}_k = \mathbf{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\mathbf{v}_k^T \mathbf{J}_d^{-1}) \tilde{\mathbf{p}}_i}{r_i} \tilde{\mathbf{q}}_i \end{cases} \quad k \in (1, s \times m) \quad (42)$$

$$\tilde{r}_k = 1 + \tilde{\mathbf{q}}_k^T (\mathbf{J}_d^{-1} \mathbf{u}_k), \quad k \in (1, s \times m) \quad (43)$$

从上述推导出的计算公式, 可以看出:

1) $\Delta \tilde{\mathbf{X}}$ 即 $\Delta \tilde{\mathbf{w}}_k, k \in (1, s)$ 的求解是完全解耦的, 具有 s 个时间并行度。

2) 依据式(35), $\mathbf{J}_d^{-1} \mathbf{u}_k, k \in (1, s \times m)$ 的计算主要涉及 $\mathbf{J}_i^{-1} \tilde{\mathbf{e}}_j, i \in (1, s), \tilde{\mathbf{e}}_j \in R^{n \times 1}$ 的计算, 具有 m 个并行度。

3) 依据式(35), $\mathbf{v}_k^T \mathbf{J}_d^{-1}, k \in (1, s \times m)$ 的计算主要涉及 $\mathbf{q}_{ij}^T \mathbf{J}_i^{-1} \tilde{\mathbf{e}}_j, i \in (1, s)$ 的计算, 同样具有 m 个并行度。

4) 依据式(42), 对给定的 k 值, $\tilde{\mathbf{p}}_k$ 与 $\tilde{\mathbf{q}}_k$ 的计算可以同时进行; 在并行求解出 $\mathbf{J}_d^{-1} \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k^T \mathbf{J}_d^{-1}$ 的基础上, $\tilde{\mathbf{p}}_k$ 与 $\tilde{\mathbf{q}}_k$ 的计算主要涉及简单的矩阵-向量计算 (matrix-vector product)。

5) $\tilde{\mathbf{R}}$ 是一个对角矩阵, $\Delta \mathbf{X}$ 的求解(方程(37))亦主要涉及简单的矩阵-向量计算。

概括起来, 上述算法将整体雅可比矩阵 \mathbf{J} 的稀疏三角分解转换成对 s 个子矩阵 $\mathbf{J}_i, i \in (1, s)$ 的稀疏三角分解, 不仅具有较好的时间并行性和空间并行性, 而且在整体求解上保持了严格牛顿法的收敛性。

4 算例测试与分析

4.1 算法基本性能测试

目前, 电力系统暂态稳定性计算主要是采用隐式梯形积分方法。本文所提方法是基于多级高斯方法, 它与(单级的)隐式梯形积分方法完全不同。为此, 本文首先对所提算法的收敛性进行了测试, 然后, 将本文算法的计算精度与隐式梯形积分方法的计算精度进行了对比测试。测试用算例系统如表 1 所示。其中, 发电机均采用 3 阶模型, 励磁系统采用典型的 3 阶系统; 故障均设定为在某一母线处发生三相短路, 经 0.1 s 后切除; 暂态过程计算时程设定为 3.0 s。

表 1 算例系统基本参数

Table 1 Basic parameters of example systems

测试系统	节点数	支路数	发电机数
IEEE-145	145	453	50
2383wp	2383	2896	327

图 1 和图 2 分别是故障切除后 ($t \geq 0.1$ s) 逐步积分过程中的牛顿迭代次数, 其中, 牛顿迭代的收敛精度设定为 10^{-4} 。从图 1 和图 2 可以看出: 对不同

规模的系统, 牛顿迭代次数变化平缓, 2~3 次迭代即可满足收敛精度要求。显然, 本文所提算法具有较好的收敛性。

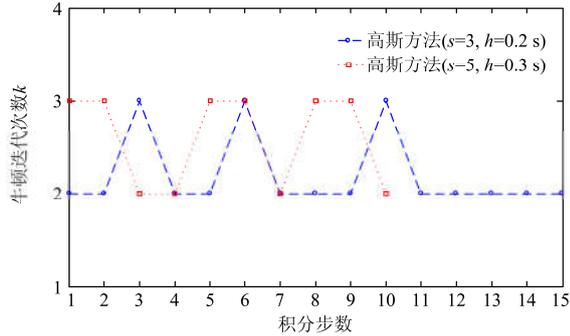


图 1 IEEE-145 系统逐步积分的牛顿迭代次数

Fig. 1 Newton iterations at each integration step for IEEE-145 system

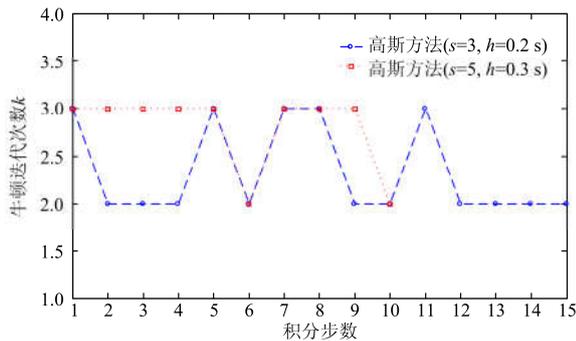


图 2 2383wp 系统逐步积分的牛顿迭代次数

Fig. 2 Newton iterations at each integration step for 2383wp system

图 3 和图 4 是多级高斯方法与隐式梯形积分法的功角计算误差曲线对比图。由于不可能获得暂态稳定性计算的精确解即解析解, 因此, 图 3 和图 4 中的误差曲线均是以采用 $h = 0.001\text{ s}$ 的隐式梯形积分法的计算结果为基准值的。从图 3 和图 4 可以看出: 在采用 $s + 1$ 倍于隐式梯形积分法的步长的情况下, s 级的高斯方法仍具有更高的计算精度, 而且随着级数的增

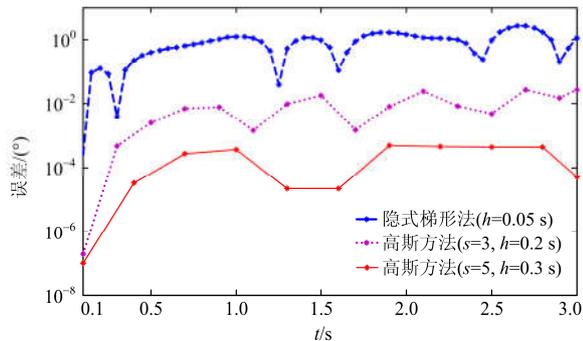


图 3 IEEE-145 节点系统的计算误差对比曲线

Fig. 3 Error trajectories comparison for IEEE-145 system

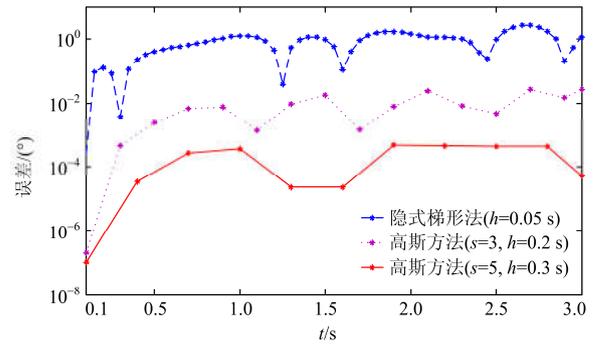


图 4 2383wp 系统的计算误差对比曲线

Fig. 4 Error trajectories comparison for 2383wp system

加, 计算精度愈高。这是多级、高阶隐式 RK 方法的一个重要优点。

4.2 算法并行性能测试

为对所提出的并行计算方法的并行性能进行测试, 本文采用多核处理器(multi-core CPUs)对算法进行了实际的并行装配。多核并行计算是一类较新的并行计算技术。相对于传统的多处理器并行计算机, 多核处理器价格低廉, 而 OpenMP^[18-19]这一开发工具为多核并行编程提供了简单、便捷的编程环境。OpenMP 是一种面向共享存储体系结构的多线程并行编程工具, 是一种基于共享内存并行的应用程序编程接口。在多核共享内存架构中, 每个核心是一个独立的“计算节点”, 但所有的核心都被连接到一个共享的内存单元上, 不同的核心在访问内存的时候使用的是相同的内存编址空间。因此, 不同的“计算节点”之间可以即时地进行数据交换。

如图 5 所示, OpenMP 采用 fork-join(派生-合并)并行执行模式。fork-join 执行模式在开始执行的时候, 只有主线程存在, 即以串行方式执行。主线程在运行过程中, 当遇到需要进行并行计算的时候, 派生(fork)出多个线程来执行并行任务。在并行代码结束执行后, 派生线程退出或者挂起, 不再工作, 控制流程回到单独的主线程中(join)。主线程继续往下执行, 当遇到需要执行并行计算的时候, 再次派生出(fork)线程来执行并行任务, 如此循环下去, 直至计算结束。

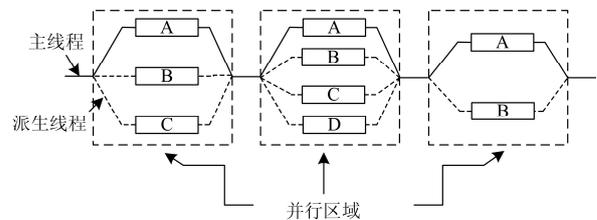


图 5 OpenMP 并行原理示意图

Fig. 5 Schematic diagram of OpenMP parallel principle

迄今为止,已有文献将 OpenMP 并行计算技术用于电力系统暂态稳定性并行计算^[20-21],相关的研究表明:基于 OpenMP 并行计算技术的暂态稳定性并行模式可以获得良好的加速比和并行率。

利用 OpenMP,本文所提出的并行计算方法在每一步积分中的主要计算步骤可大致描述如下。

1) 置牛顿迭代初值: $\tilde{z}_i = \mathbf{0}$, $\tilde{V}_i = V_n$, $i \in (1, s)$;

2) 置牛顿迭代次数 $k = 1$;

3) 多线程并行计算:

(1) 计算 $\tau_i, \mu_i, \sigma_i, \eta_i$, $i \in (1, s)$;

(2) 形成雅可比矩阵 J_i , $i \in (1, s)$;

(3) 计算 ∇H_i , $i \in (1, s)$;

(4) 利用多波前算法^[22]对矩阵 $J_i, i \in (1, s)$ 进行稀疏三角分解;

(5) 在上述三角分解的基础上,利用多波前算法求解出 $\Delta \tilde{w}_i = J_i^{-1} \nabla H_i$, $J_i^{-1} \tilde{e}_j$, $J_i^{-T} \tilde{e}_j$, $i \in (1, s)$ 。

4) 循环计算($i \in (1, s \times m)$):

(1) 利用 2 个线程同时并行计算 \tilde{p}_i , \tilde{q}_i ;

(2) 依据式(43)计算 \tilde{r}_i ;

5) 多线程并行计算:

利用分块矩阵形式,采用 s 个线程并行计算 ΔX 。

6) 利用 ΔX 更新 \tilde{z}_i, \tilde{V}_i , $i \in (1, s)$; 置 $k = k + 1$;

7) 牛顿迭代过程收敛性判断:

若收敛,则转至步骤 8);

若不收敛,则转至步骤 3)。

8) 利用式(10),采用多线程计算出 \mathbf{x}_{n+1} ;

9) 利用 \mathbf{x}_{n+1} , 求解网络方程解出相应的 V_{n+1} 。

显然,上述求解过程主要是按所采用的 Gauss 方法的级数来确定并发的多线程的数量,因此,对 s 级的 Gauss 方法,需要采用含 $s+1$ 个核心的多核处理器。

表 2 是在分别采用传统的 CPU 串行计算模式(模式 1)以及基于 OpenMP 的多核并行计算模式(模式 2)的情况下,对所提出的算法的计算速度进行对比测试的结果。其中, γ 是本文算法在模式 2 下相对于模式 1 所获得的加速比。所用计算机为 AMD FX-6200 六核计算机。

从表 2 可以看出:对 2 个不同规模的电力系统,在分别采用 3 个($s=3$)和 5 个($s=5$)并行多线程的情况下,本文算法均获得了较好的加速比。

若将每个并发线程看作是一个独立的处理器,则可以定义并行效率指标为

$$\lambda = (\gamma/s) \times 100\%$$

表 2 算法并行性能测试结果

Table 2 Test results for the parallel performance of the proposed algorithm

算例系统	s/h	计算时间/ms		γ
		模式 1	模式 2	
IEEE-145	3/0.2 s	419	184	2.28
	5/0.3 s	387	102	3.79
2383wp	3/0.2 s	12 395	5018	2.47
	5/0.3 s	11 035	2672	4.13

依据上述定义,在多核并行计算模式下,本文算法的并行计算效率的分析结果如表 3 所示。

表 3 算法并行效率

Table 3 Test results for the parallel efficiency of the proposed algorithm

算例系统	s/h	λ (%)
IEEE-145	3/0.2 s	76.0
	5/0.3 s	75.8
2383wp	3/0.2 s	82.3
	5/0.3 s	82.6

从表 3 可以看出:当系统规模较大时,本文算法的并行计算效率有所提高。熟知:使用 OpenMP 进行并行化不可避免地会引入一定的“并行化开销”。因此,当“并行化开销”一定时,若并发线程所执行的任务愈重,则相应的并行效率也就愈高。

概括起来,本文算法可以获得较好的并行性能。这主要得益于两点:一是本文算法按 s 个时间点进行分块和“解耦”,分配给各个线程或核心的计算任务基本均衡;二是在每一步的积分中,并发任务或多线程计算任务比较集中,从而减少了串行执行和并行执行相互切换所需的时间开销。

5 结论

本文将 s 级 $2s$ 阶的高斯方法和扩展的 Sherman-Morrison 矩阵求逆公式相结合,推导出了一类新的暂态稳定性并行计算方法。通过数学推导以及基于 OpenMP 的并行仿真测试结果,可以得出以下结论:

1) 本文所提出的并行算法是在严格牛顿法的基础上推导出来的;在推导过程中没有采用任何近似。因此,该算法在整体求解上具有严格牛顿法的收敛性。

2) 本文所提算法主要是依据所采用的 Gauss 方法的级数来确定并发多线程的数量。鉴于 Gauss 方法是一个系列方法,因此,本文所提算法不仅算法本身具有通用性,在具体的应用中也具有很好的普

适性, 即可以依据具体的多核计算机来选用相应级数的 Gauss 积分方法。

3) 本文所提算法比较适合于共享内存多核并行计算模式。对大规模电力系统暂态稳定性计算, 本文所提并行算法可以获得较好的加速比, 可以满足大规模电力系统暂态稳定性实时分析计算的要求。

附录 A

3 级 6 阶高斯方法的 Butcher 表为

0.04691	0.05923	-0.01957	0.01125	-0.00559	0.00159
0.23077	0.12815	0.11966	-0.02459	0.01032	-0.00277
0.5	0.11378	0.26000	0.14222	-0.02069	0.00468
0.76923	0.12123	0.22900	0.30904	0.11966	-0.00969
0.95309	0.11688	0.24491	0.27319	0.25888	0.05923
	0.11846	0.23931	0.28444	0.23931	0.11846

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{2}{9} - \frac{\sqrt{15}}{15}$	$\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{30}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{24}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{24}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}$	$\frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{30}$	$\frac{2}{9} + \frac{\sqrt{15}}{15}$	$\frac{5}{36}$
	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$

5 级 10 阶高斯方法的 Butcher 表为

参考文献

- [1] 宋新立, 汤涌, 卜广全, 等. 大电网安全分析的全过程动态仿真技术[J]. 电网技术, 2008, 32(22): 23-28.
SONG Xinli, TANG Yong, BU Guangquan, et al. Full dynamic simulation for the stability analysis of large power system[J]. Power System Technology, 2008, 32(22): 23-28.
- [2] 田芳, 黄彦浩, 史东宇, 等. 电力系统仿真分析技术的发展趋势[J]. 中国电机工程学报, 2014, 34(13): 2151-2163.
TIAN Fang, HUANG Yanhao, SHI Dongyu, et al. Developing trend of power system simulation and analysis technology[J]. Proceedings of the CSEE, 2014, 34(13): 2151-2163.
- [3] 薛巍, 舒继武, 严剑锋, 等. 基于集群机的大规模电力系统暂态过程并行仿真[J]. 中国电机工程学报, 2003, 23(8): 38-43.
XUE Wei, SHU Jiwu, YAN Jianfeng, et al. Cluster-based parallel simulation for power system transient stability analysis[J]. Proceedings of the CSEE, 2003, 23(8): 38-43.
- [4] 周孝信, 田芳, 李亚楼, 等. 电力系统并行计算与数字仿真[M]. 北京: 清华大学出版社, 2014.
- [5] 薛巍, 舒继武, 王心丰, 等. 电力系统暂态稳定仿真并行算法的研究进展[J]. 系统仿真学报, 2002, 14(2): 177-182.
XUE Wei, SHU Jiwu, WANG Xinfeng, et al. Advance of parallel algorithm for power system transient stability analysis[J]. Journal of System Simulation, 2002, 14(2): 177-182.
- [6] 汪芳宗, 张磊. 基于辛 Radau 方法的暂态稳定性并行计算方法[J]. 电力系统保护与控制, 2011, 39(23): 34-38.
WANG Fangzong, ZHANG Lei. Parallel algorithm based on symplectic Radau method for transient stability simulation[J]. Power System Protection and Control, 2011, 39(23): 34-38.
- [7] VAHID J M, VENKATA D. SIMD-based large-scale transient stability simulation on the graphics processing unit[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2010, 25(3): 1589-1599.
- [8] 张宇宇, 高山, 赵欣. 基于 GPU 的机电暂态仿真细粒度并行算法[J]. 电力系统自动化, 2012, 36(9): 54-60.
ZHANG Ningyu, GAO Shan, ZHAO Xin. A fine granularity parallel algorithm for electromechanical transient stability simulation based on graphic processing unit[J]. Automation of Electric Power Systems, 2012, 36(9): 54-60.
- [9] HAIRER E, NØRSETT S P, WANNER G. Solving ordinary differential equations I: non-stiff problems[M]. Berlin: Springer, 1987: 204-214.
- [10] HAIRER E, WANNER G. Solving ordinary differential equations II: stiff and differential-algebraic problems[M]. Berlin: Springer, 1991: 40-130.
- [11] BUTCHER J C. Numerical methods for ordinary differential equations[M]. New York: Wiley, 2008: 213-273.
- [12] 汪芳宗, 何一帆. 基于多级高阶辛 Runge-Kutta 方法的暂态稳定性并行计算方法[J]. 电力系统保护与控制, 2011, 39(11): 22-26, 32.

- WANG Fangzong, HE Yifan. Parallel computation of transient stability based on multi-level high-order symplectic Runge-Kutta method[J]. Power System Protection and Control, 2011, 39(11): 22-26, 32.
- [13] 汪芳宗. 大规模电力系统暂态稳定性数值计算方法[M]. 北京: 科学出版社, 2013.
- [14] BRU R, CERDÁN J, MARÍN J, et al. Preconditioning sparse nonsymmetric linear systems with the Sherman-Morrison formula[J]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004, 25(2): 701-715.
- [15] 李寿佛. 刚性常微分方程及刚性泛函数微分方程数值分析[M]. 湘潭: 湘潭大学出版社, 2010.
- [16] 冯康, 秦孟兆. 哈密尔顿系统的辛几何算法[M]. 杭州: 浙江科学技术出版社, 2003.
- [17] 江涵, 江全元. 基于 GPU 计算平台的大规模电力系统暂态稳定计算[J]. 电力系统保护与控制, 2013, 41(4): 13-20.
- JIANG Han, JIANG Quanyuan. A parallel transient stability algorithm for large-scale power system based on GPU platform[J]. Power System Protection and Control, 2013, 41(4): 13-20.
- [18] 张平, 李清宝, 赵荣彩. OpenMP 并行程序的编译器优化[J]. 计算机工程, 2006, 32(24): 37-40.
- ZHANG Ping, LI Qingbao, ZHAO Rongcai. Compiler optimization algorithm for OpenMP parallel program[J]. Computer Engineering, 2006, 32(24): 37-40.
- [19] 罗秋明, 明仲, 刘刚, 等. OpenMP 编译原理及实现技术[M]. 北京: 清华大学出版社, 2012.
- [20] 周挺辉, 严正, 唐聪, 等. 基于多核处理器技术的暂态稳定并行算法[J]. 电力系统自动化, 2013, 37(8): 70-75.
- ZHOU Tinghui, YAN Zheng, TANG Cong, et al. A parallel algorithm for transient stability computing based on multi-core processor technology[J]. Automation of Electric Power Systems, 2013, 37(8): 70-75.
- [21] JIANG Quanyuan, JIANG Han. OpenMP-based parallel transient stability simulation for large-scale power systems[J]. Science China Technological Sciences, 2012, 55(10): 2837-2846.
- [22] SIDDHARTHA K K, JAMES D M, CHEN Q M. Multifrontal solver for online power system time-domain simulation[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2008, 23(4): 1727-1737.

收稿日期: 2016-03-09; 修回日期: 2016-05-10

作者简介:

廖小兵(1989-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为电力系统分析与计算; E-mail: lxbctgu@163.com

汪芳宗(1966-), 男, 博士, 教授, 主要研究方向为电力系统分析与控制、新能源微电网等; E-mail: fzwang@ctgu.edu.cn

杨萌(1991-), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为电力系统分析与计算。

(编辑 周金梅)