

DOI: 10.7667/PSPC160253

一种幅值无衰减的改进线性插值方法

李帅, 龚世敏, 丁泉, 赵谦, 谢坤

(南京国电南自电网自动化有限公司, 江苏 南京 211153)

摘要: 研究了智能变电站普遍采用的线性插值法, 并针对幅值衰减问题提出了改进方法。首先采用离散传递函数的方法, 推导了线性插值的幅值增益公式。进而分析了线性插值的幅频特性, 并评估了幅值衰减对保护、测控等环节的影响。在现有的 4 kHz 采样率下, 线性插值不能完全满足采样环节对谐波幅值精度的要求。在此基础上, 利用幅值增益相对于插值位置的对称性, 提出了一种改进的插值方法。经理论证明, 该方法对各频率信号的幅值增益恒为 1。然后, 给出了该方法的软件实现过程, 特别是初值的选择, 并分析了算法的稳定性。最后, 结合具体的波形, 通过 FFT 分析验证了该方法的插值效果。分析结果表明, 所提的改进方法可以解决线性插值的幅值衰减问题。

关键词: 智能变电站; 线性插值; 幅值增益; 谐波精度; FFT 分析

An improved linear interpolation method without amplitude attenuation

LI Shuai, GONG Shimin, DING Quan, ZHAO Qian, XIE Kun

(Guodian Nanjing Automation Co., Ltd., Nanjing 211153, China)

Abstract: The linear interpolation method commonly used in intelligent substations is researched, and an improved method is proposed for the problem of amplitude attenuation. First of all, the amplitude gain formula of linear interpolation is derived by using the discrete transfer function. Then the amplitude frequency characteristic of linear interpolation is analyzed, and the influence of amplitude attenuation on the protection and measurement is evaluated. In the 4 kHz sampling rate, the linear interpolation can not meet the requirement of harmonic accuracy. On this basis, an improved interpolation method is proposed, using the symmetry of the amplitude gain about the interpolation position. The theoretical proof shows that the amplitude gain of each frequency signal is 1. Additionally, the software implementation process is given, particularly the selection of the initial value, and the stability of the method is analyzed. Finally, the interpolation effect of the method is verified by FFT analysis. The results show that the improved method can solve the problem of amplitude attenuation of linear interpolation.

Key words: intelligent substation; linear interpolation; amplitude gain; harmonic accuracy; FFT analysis

0 引言

智能变电站一般采用数字化采样, 并以 IEC 61850-9-2 等通信规约完成采样值的数据传输与信息交互^[1-5]。其采样系统是分布式的, 需对不同设备的采样值进行同步。在普遍使用的点对点模式下, 一般采用插值的方法实现采样值同步^[6-8]。

线性插值具有算法简单、效率高等优点, 在采样值同步中得到了较为广泛的应用。但线性插值会产生一定的幅值衰减, 造成波形失真, 影响采样数据的精确性^[9-11]。由于各次谐波的增益系数不一样, 无法简单地用系数加以补偿。因此, 改进现有的线

性插值具有一定的理论意义和工程价值。

本文针对上述问题, 理论分析了线性插值的幅频特性; 在此基础上, 利用幅值增益相对于插值位置的对称性, 提出了一种改进的插值方法, 有效解决了幅值衰减问题。

1 线性插值分析

图 1 给出了线性插值的示意图。其中: A, B 为已知时刻的采样值; C 为线性插值计算出的采样值; D 为待插值时刻的实际采样值。不难发现, 插值出的采样值与实际值存在一定的偏差。

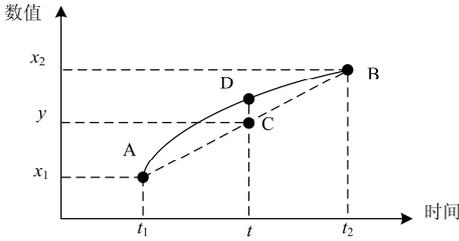


图 1 线性插值示意图

Fig. 1 Sketch map of linear interpolation

线性插值的计算如式(1)所示^[12-15]。

$$y = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}(t - t_1) \quad (1)$$

在数字化采样中, 采样间隔为固定值 T 。定义插值位置 k , 其满足表达式(2)。

$$k = \frac{t - t_1}{T} = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \quad (2)$$

则线性插值的计算公式可简化为式(3)。

$$y = (1 - k)x_1 + kx_2 \quad (3)$$

1.1 幅值增益的理论推导

对式(3)进行 Z 变换, 可得表达式(4)。

$$Y(z) = [(1 - k)z^{-1} + k]X(z) \quad (4)$$

则线性插值的传递函数为

$$H(z) = (1 - k)z^{-1} + k \quad (5)$$

将 $z = e^{j\omega T}$ 代入式(5), 得

$$H(j\omega) = (1 - k)z^{-j\omega T} + k \quad (6)$$

由欧拉公式, 得

$$e^{-j\omega T} = \cos \omega T - j \sin \omega T \quad (7)$$

将其代入式(6), 得

$$H(j\omega) = [(1 - k) \cos \omega T + k] - j(1 - k) \sin \omega T \quad (8)$$

则线性插值的幅值增益为

$$F = |H(j\omega)| = \sqrt{(1 - k)^2 + 2k(1 - k) \cos \omega T + k^2} \quad (9)$$

若采样频率为 f_s , 信号频率为 f , 则存在如下关系式。

$$\omega = 2\pi f \quad (10)$$

$$T = \frac{1}{f_s} \quad (11)$$

则幅值增益的表达式为

$$F = \sqrt{(1 - k)^2 + 2k(1 - k) \cos \frac{2\pi f}{f_s} + k^2} \quad (12)$$

1.2 幅频特性分析

由式(12)可以得出线性插值的幅频特性曲线, 如图 2 所示。其中, 各曲线对应不同的插值位置 k , 横坐标为信号频率 f 相对于采样频率 f_s 的标么值。

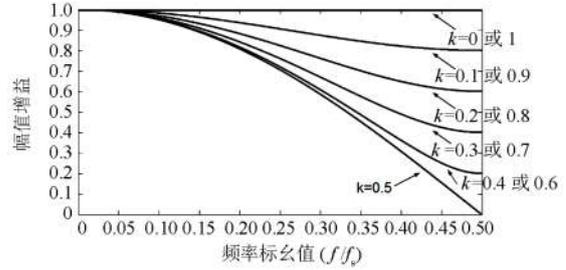


图 2 幅频特性曲线

Fig. 2 Amplitude-frequency curve

由图 2 及式(12), 可以得出以下结论。

1) 当 k 为 0 或 1 时, 幅值增益 F 为 1。此时插值时刻与已知数据重合, 无幅值衰减。

2) 当 k 不为 0 或 1 时, 幅频曲线呈低通特性, 信号频率越高, 衰减越大。

该结论的理论证明如下。

幅值增益 F 对频率 f_s 求导, 可得式(13)。

$$F'(f) = \frac{\partial F}{\partial f} = \frac{-4\pi k(1 - k) \sin \frac{2\pi f}{f_s}}{2\sqrt{(1 - k)^2 + 2k(1 - k) \cos \frac{2\pi f}{f_s} + k^2}} \quad (13)$$

当 $0 \leq f < 0.5f_s$ 时, $F'(f) < 0$;

则在该区间内, F 随 f 单调递减, 即频率越高, 幅值衰减越大。

3) 当 k 为 0.5 时, 幅值衰减最大。该结论的理论证明如下。

幅值增益 F 对频率 k 求导, 可得式(14)。

$$F'(k) = \frac{\partial F}{\partial k} = \frac{2(2k - 1)(1 - \cos \frac{2\pi f}{f_s})}{2\sqrt{(1 - k)^2 + 2k(1 - k) \cos \frac{2\pi f}{f_s} + k^2}} \quad (14)$$

当 $k=0.5$ 时, $F'(k) = 0$;

当 $0 \leq k < 0.5$ 时, $F'(k) < 0$;

当 $0.5 < k \leq 1$ 时, $F'(k) > 0$ 。

则 $k=0.5$ 为 0~1 区间内的极小值点, 即该插值位置处的幅值衰减最大。

1.3 幅值误差的分析与评估

采样精度与保护、测量等环节密切相关。参照相关标准与规范, 一般对幅值误差作如下要求^[16-17]。

1) 对于保护通道, 基波幅值误差 $\leq 1\%$, 2~5 次谐波的幅值误差 $\leq 5\%$;

2) 对于测量通道, 基波幅值误差 $\leq 0.2\%$, 2~13 次谐波的幅值误差 $\leq 5\%$ 。

目前智能变电站主要采用 4 kHz(即每周波 80

点)的采样率; 并且插值位置为 0.5 时, 幅值衰减最大。因此, 分析采样频率为 4 kHz, 插值位置为 0.5 时的幅值增益具有一定的典型性, 如表 1 所示。

表 1 线性插值幅值增益($k=0.5, f_s=4$ kHz)

Table 1 Amplitude gain of linear interpolation

when k is 0.5 and f_s is 4 kHz

谐波次数	幅值增益
0(直流分量)	1
1(基波)	0.9992
2	0.9969
3	0.9931
4	0.9877
5	0.9808
6	0.9724
7	0.9625
8	0.9511
9	0.9382
10	0.9239
11	0.9081
12	0.8910
13	0.8725

从表 1 不难发现:

1) 对于基波, 4 kHz 采样率下的最大幅值衰减为 0.08%, 满足保护 1% 及测量 0.2% 的需求;

2) 对于 5 次谐波, 最大幅值衰减为 1.92%, 满足保护 5% 的误差需求;

3) 对于 13 次谐波, 最大幅值衰减为 12.75%, 超出了测量 5% 的要求。

以上仅仅是单次插值的幅值误差, 若出现多次插值过程, 则误差会累计。例如, 对于基波, 若经过两次插值, 则最大幅值误差会达到 0.16%, 接近测量 0.2% 的需求。

实际系统中, 由于其他环节也会产生幅值误差, 例如 RC 滤波等, 插值过程允许的幅值误差更小。

因此, 4 kHz 采样率下, 线性插值产生的幅值误差不可忽略。

2 改进的线性插值

为了消除插值过程的幅值衰减, 提高采样的幅值精度, 下面将对线性插值方法进行改进。

2.1 改进插值方法的构建

对于式(12), 令 $k=1-m$, 则有如式(15)关系式。

$$F(k) = \sqrt{m^2 + 2m(1-m)\cos\frac{2\pi f}{f_s} + (1-m)^2} = \quad (15)$$

$$F(m) = F(1-k)$$

由此可见, 插值位置 k 、 $1-k$ 对应的幅值增益是

相等的, 即线性插值的幅值增益具有一定的对称性。下面将利用这一特征来构建幅值无衰减的改进线性插值方法。

设已知的采样值序列为 $x(n)$, 经插值位置为 w 的线性插值后, 得出采样序列 $a(n)$ 。

定义采样值序列 $y(n)$, 其与 $x(n)$ 时间上相差 kT , 且经过线性插值后, 也得到采样序列 $a(n)$, 如图 3 所示。不难得出, 此时的插值位置为 $1-k+w$ 。

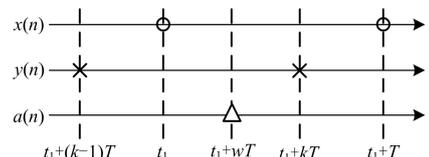


图 3 采样序列关系图

Fig. 3 Relationship of sampling sequences

由式(15), 若两个插值位置满足对称性关系, 则插值产生的幅值增益是相同的, 此时 $x(n)$ 、 $y(n)$ 幅值是相等的。

基于上述分析, 可以得出下列关系式:

$$1-w = 1-k+w \quad (16)$$

$$w = k/2 \quad (17)$$

由此可以构造出无幅值衰减的改进线性插值, 如图 4 所示。

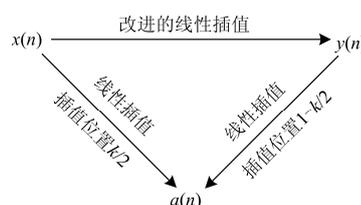


图 4 改进的线性插值原理图

Fig. 4 Sketch map of improved linear interpolation

由式(3), 可得如式(18)关系式。

$$a_n = (1-\frac{k}{2})x_{n-1} + \frac{k}{2}x_n = \frac{k}{2}y_{n-1} + (1-\frac{k}{2})y_n \quad (18)$$

则改进线性插值的计算公式如式(19)

$$y_n = x_{n-1} + \frac{k}{2-k}x_n - \frac{k}{2-k}y_{n-1} \quad (19)$$

不难发现, 本文所提的改进方法基于固定的时序关系, 因而只适用于 $x(n)$ 、 $y(n)$ 同频率的应用场合, 如同频率合并单元的级联、合并单元连接同频率的电子式互感器等。对于频率变化的场合, 还需进一步研究相应的改进方法。

2.2 幅值无衰减的理论证明

对式(19)进行 Z 变换, 得

$$[z^{-1} + \frac{k}{2-k}]X(z) = [\frac{k}{2-k}z^{-1} + 1]Y(z) \quad (20)$$

则传递函数为

$$H(z) = \frac{(2-k)z^{-1} + k}{kz^{-1} + (2-k)} \quad (21)$$

将 $z = e^{j\omega T}$ 代入式(21), 得

$$H(j\omega) = \frac{(2-k)e^{-j\omega T} + k}{ke^{-j\omega T} + (2-k)} \quad (22)$$

由式(7), 得

$$H(j\omega) = \frac{[(2-k)\cos\omega T + k] - j(2-k)\sin\omega T}{[k\cos\omega T + (2-k)] - jk\sin\omega T} \quad (23)$$

则幅值增益如下

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\frac{[(2-k)\cos\omega T + k]^2 + (2-k)^2\sin^2\omega T}{[k\cos\omega T + (2-k)]^2 + k^2\sin^2\omega T}} = \sqrt{\frac{(2-k)^2 + 2k(2-k)\cos\omega T + k^2}{k^2 + 2k(2-k)\cos\omega T + (2-k)^2}} = 1 \quad (24)$$

由式(24), 本文提出的改进线性插值方法的幅值增益恒为 1, 即对各频率的信号均无幅值衰减。

2.3 初值选择与稳定性分析

由于存在输入的反馈, 改进的插值方法软件实现时必然涉及 y_n 的初值问题。

初始计算时, y_0 未知, 软件一般默认该值为 0, 此时若根据式(19)计算, 必然存在一定的初始偏差。

为了降低初始偏差, 更快地跟踪采样波形, 第一个计算点可采用现有的线性插值方法, 即

$$y_1 = (1-k)x_0 + kx_1 \quad (25)$$

改进的线性插值方法的算法流程图如图 5 所示。具体步骤如下: 首先, 获取插值时刻前后的两点数据 x_{n-1} 、 x_n , 并计算插值位置 k ; 然后判断是否

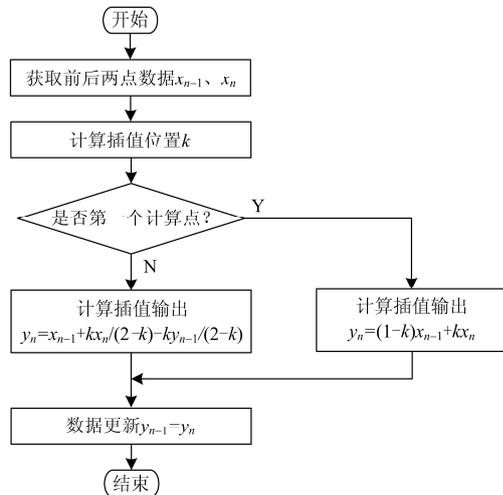


图 5 改进插值方法的算法流程图

Fig. 5 Algorithm flowchart of improved interpolation

是第一个计算点, 对于第一个计算点采用式(3)计算 y_n 初值, 否则采用式(19)计算插值输出; 最后更新数据, 为下次计算做准备。由于改进的插值方法引入了输出到输入的闭环, 因此需分析该方法的稳定性。

由式(21)可得出传递函数的极点, 如式(26)所示。

$$z_p = \frac{k}{2-k} \quad (26)$$

当 $0 \leq k < 1$ 时, $|z_p| < 1$, 系统稳定^[18-19];

当 $k=1$ 时, $z_p=1$, 系统临界稳定, 需要做进一步分析。由式(19)及式(25), 当 $k=1$ 时, 有如下的迭代关系成立:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_1 + x_2 - y_1 = x_2 \\ y_3 &= x_2 + x_3 - y_2 = x_3 \\ &\vdots \\ y_n &= x_{n-1} + x_n - y_{n-1} = x_n \end{aligned} \quad (27)$$

因此, $k=1$ 时算法也是稳定的。

3 算法验证

为了验证基波以及各次谐波的插值精度, 采用式(28)所示的输入波形, 即基波叠加等幅值的 2~13 次谐波。

$$x = \sum_{m=1}^{13} \sin(2\pi \cdot 50mt) \quad (28)$$

插值前后的波形如图 6 所示, 包括插值前的输入波形、线性插值后的波形、改进的线性插值后的波形。其中, 采样频率 f_s 为 4 kHz, 插值位置 k 为 0.5。

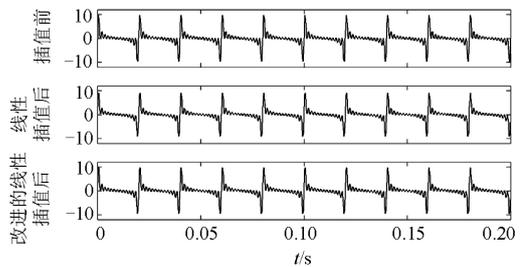


图 6 插值前后的波形

Fig. 6 Waveforms before and after interpolation

对插值后的波形进行 FFT 分析, 如图 7 所示。从 FFT 分析结果不难发现, 若采用现有的线性插值方法, 各次谐波会出现不同程度的幅值衰减; 而采用本文所提的改进方法, 可解决该问题, 实现幅值无衰减。

当输入信号仅含 13 次谐波时, 插值前后的波形如图 8 所示。其中, 采样频率 f_s 为 4 kHz, 插值位置 k 为 0.5。

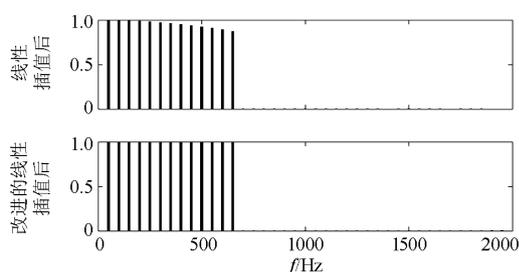


图 7 插值后波形的 FFT 分析

Fig. 7 FFT analysis after interpolation

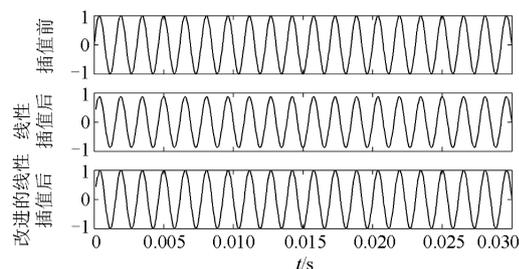


图 8 13 次谐波插值前后的波形

Fig. 8 Waveforms before and after interpolation (13th harmonic)

图 8 直观地对比了两种插值方法。经过现有的线性插值后, 13 次谐波的幅值产生了较为明显的衰减; 而采用改进的插值方法, 则保持幅值不变, 达到了预期的效果。

4 结语

针对线性插值的幅值衰减问题, 利用幅值增益相对于插值位置的对称性, 提出了一种改进的方法。该方法从原理上对各频率信号的幅值增益恒为 1, 无需提高采样频率或者控制插值位置, 就可以解决幅值衰减问题, 为提高采样精度, 特别是谐波的幅值精度提供了一种思路。

所提的改进方法引入了输入到输出的反馈, 尽管理论分析其算法是稳定的, 但对波形突变等动态过程的影响还需进一步评估; 此外, 如何构建开环的方法解决幅值衰减问题, 也值得进一步研究。

参考文献

[1] 倪兆瑞, 王延安. 智能变电站合并单元延时特性现场测试仪的设计[J]. 电力系统保护与控制, 2014, 42(10): 119-124.
NI Zhaorui, WANG Yanan. Design of field testing instrument for merging unit delay characteristics in smart substation[J]. Power System Protection and Control, 2014, 42(10): 119-124.

[2] 王雪, 雷胜华. 改进埃特金插值理论在智能变电站中的应用[J]. 电力系统保护与控制, 2015, 43(15): 73-78.
WANG Xue, LEI Shenghua. Data synchronization based on improved Aitken interpolation in intelligent substation[J]. Power System Protection and Control, 2015, 43(15): 73-78.

[3] 张晓丛. 基于 IEC61850-9-2 采样值接收及处理研究[D]. 济南: 山东大学, 2014.

[4] 嵇建飞, 袁宇波, 王立辉, 等. 某 110kV 智能变电站合并单元异常情况分析及对策[J]. 电工技术学报, 2015, 30(16): 255-260.
JI Jianfei, YUAN Yubo, WANG Lihui, et al. Analysis and countermeasure on abnormal operation of one 110 kV intelligent substation merging unit[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2015, 30(16): 255-260.

[5] 苟怀强, 熊颢新, 贾林泉, 等. 基于改进小波突变点检测的合并单元额定延时测试方法研究[J]. 陕西电力, 2015, 43(12): 38-42.
GOU Huaiqiang, XIONG Jixin, JIA Linqun, et al. Research on test method for rated delay of merging unit based on improved wavelet mutation point detection[J]. Shaanxi Electric Power, 2015, 43(12): 38-42.

[6] 江卫良, 陆源, 郑作伟, 等. 基于二次插值算法的采样值保护新算法[J]. 电力系统保护与控制, 2015, 43(16): 30-35.
JIANG Weiliang, LU Yuan, ZHENG Zuowei, et al. A new algorithm on sampled value protection based on quadratic interpolation algorithm[J]. Power System Protection and Control, 2015, 43(16): 30-35.

[7] 翟瑞淼, 英超, 任国臣, 等. 基于 Nuttall 窗的三峰插值谐波算法分析[J]. 电力系统保护与控制, 2015, 43(10): 38-43.
ZHAI Ruimiao, YING Chao, REN Guochen, et al. An approach for harmonic analysis based on Nuttall window and triple-spectral-line interpolation[J]. Power System Protection and Control, 2015, 43(10): 38-43.

[8] 张志鹏, 胡君慧, 刘国平, 等. 基于点对点技术的数字化变电站工程实践[J]. 电力自动化设备, 2009, 29(4): 139-142.
ZHANG Zhipeng, HU Junhui, LIU Guoping, et al. Engineering practice of digital substation based on peer-to-peer technology[J]. Electric Power Automation Equipment, 2009, 29(4): 139-142.

[9] 丁泉, 李帅. 智能变电站重采样应用研究及其线性插值法误差分析[J]. 电力系统保护与控制, 2015, 43(23): 132-136.

- DING Quan, LI Shuai. Application study on resampling in smart substation with error analysis of linear interpolation[J]. Power System Protection and Control, 2015, 43(23): 132-136.
- [10] 郭乐, 潘济猛, 卢家力, 等. 插值算法在智能变电站中的应用[J]. 电力自动化设备, 2010, 30(10): 103-105.
- GUO Le, PAN Jimeng, LU Jiali, et al. Application of interpolation algorithms in smart substation[J]. Electric Power Automation Equipment, 2010, 30(10): 103-105.
- [11] 张雷, 张国, 邱亚琴. Lagrange 插值的改进算法研究及误差分析[J]. 电力系统保护与控制, 2014, 42(16): 66-70.
- ZHANG Lei, ZHANG Guo, QIU Yaqin. Research and error analysis of an improved Lagrange interpolation algorithm[J]. Power System Protection and Control, 2014, 42(16): 66-70.
- [12] 李庆扬. 数值分析[M]. 5 版. 北京: 清华大学出版社, 2008.
- [13] 蔺小林. 计算方法[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2009.
- [14] 唐秀明, 袁荣湘, 陈君, 等. 基于 Carathéodory-Fejér 插值定理考虑误差界的负荷建模方法[J]. 电工技术学报, 2015, 30(20): 176-184.
- TANG Xiuming, YUAN Rongxiang, CHEN Jun, et al. Load modeling considering error boundary based on caratheodory-fejer interpolation theorem[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2015, 30(20): 176-184.
- [15] 李攀宏, 韩正庆, 董智慧, 等. 基于线性插值法的 SMV 丢包处理措施研究[J]. 陕西电力, 2014, 42(4): 10-14.
- LI Panhong, HAN Zhengqing, DONG Zhihui, et al. Study on SMV packet loss treatment measures based on linear interpolation[J]. Shaanxi Electric Power, 2014, 42(4): 10-14.
- [16] Q/GDW 11015-2013 模拟量输入式合并单元检测规范[S]. 北京: 国家电网公司, 2011.
- [17] GB/T 20840.8-2007 互感器第 8 部分: 电子式电流互感器[S]. 北京: 中华人民共和国国家质量监督检验检疫总局, 中国国家标准化管理委员会, 2007.
- [18] 胡寿松. 自控控制原理[M]. 5 版. 北京: 科学出版社, 2007.
- [19] 刘卫东. 信号与系统分析基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.

收稿日期: 2016-03-01; 修回日期: 2016-03-26

作者简介:

李 帅(1984-), 男, 硕士, 工程师, 从事智能变电站过程层设备的开发工作; E-mail: shuai-li@sac-china.com

龚世敏(1980-), 男, 硕士, 工程师, 从事电力自动化设备的开发与管理工作; E-mail: shimin-gong@sac-china.com

丁 泉(1979-), 男, 硕士, 工程师, 从事电力自动化设备的开发与管理工作. E-mail: quan-ding@sac-china.com

(编辑 葛艳娜)