

DOI: 10.7667/PSPC150626

基于 Nuttall 窗四谱线插值 FFT 的电力谐波分析

李得民, 何怡刚

(合肥工业大学电气与自动化工程学院, 安徽 合肥 230009)

摘要: 快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform, FFT)在非同步采样和非整数周期截断时难以精确检测谐波各参数。加窗和插值算法可提高 FFT 的精确度。分析了 Nuttall 窗的频谱特性, 提出了基于 Nuttall 窗四谱线插值 FFT 的电力谐波分析算法。该算法充分利用峰值谱线频点附近的四条谱线进行加权运算以提高谐波分析精度, 运用多项式拟合推导出实用的插值修正公式。仿真结果验证了在非同步采样时, 该算法检测谐波的精度更高, 有效地抑制了频谱泄漏。

关键词: 非整数周期截断; Nuttall 窗; 四谱线插值; 峰值谱线频点; 多项式拟合

Harmonic analysis of power system based on Nuttall window four-spectrum-line interpolation FFT

LI Demin, HE Yigang

(School of Electrical Engineering and Automation, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract: There is difficult for Fast Fourier Transform to obtain the exact harmonic parameters in situation of non-synchronized sampling and non-interger cycle truncation. Utilization of window functions and interpolation algorithms can improve the accuracy of FFT. The spectral characteristics of Nuttall window are analyzed and an algorithm based on Nuttall window four-spectrum-line interpolation FFT is proposed to analyze electric power harmonic. The algorithm has improved the accuracy of harmonic analysis by using weighted arithmetic of four spectral lines near the peak spectrum-line frequency point. The applicable formulas are obtained by fitting of polynomials. Simulation results verify a higher accuracy of harmonic analysis and a better effect of restraining the spectral leakage in non-synchronized sampling by using the algorithm.

This work is supported by National Science Fund for Distinguished Young Scholars (No. 50925727).

Key words: non-interger cycle truncation; Nuttall window; four-spectrum-line interpolation; peak spectrum-line frequency point; polynomial fit

0 引言

电力系统中的各类非线性设备给电网带来大量谐波, 导致电能质量恶化^[1-3]。为了维护电网的安全稳定运行, 高精度的谐波成分检测具有重要意义。目前谐波分析最常用的方法是快速傅里叶变换(FFT)。当被测信号的频率变化导致非同步采样时, FFT 存在频谱泄漏现象^[4], 无法精确检测谐波的幅

值、频率和相位等参数。电网频率存在波动^[5-6], 即使采用离散锁相环技术也很难实现同步采样^[7]。采用性能优良的窗函数可以有效抑制频谱泄漏, 对结果进行插值校正可减小栅栏效应引起的误差^[8-9]。常用的窗函数有 Blackman 窗^[10]、Blackman-Harris 窗^[11]、Rife-Vincent 窗^[12]和 Nuttall 窗^[13]等。应用较多的插值算法有双谱线^[14]和三谱线^[15]插值算法。双谱线插值算法利用峰值谱线频点附近的两条谱线, 引入频率偏移量求取谐波各参数, 但该算法没有充分利用频点附近泄漏谱线的信息。三谱线插值算法利用频点附近的三条谱线, 对泄漏信息的利用率有所提高, 但该算法未考虑频点左右对称谱线包含的信息^[16]。

本文分析了 Nuttall 窗的频谱特性, 选用旁瓣性

基金项目: 国家杰出青年科学基金(50925727); 国防科技计划项目(C1120110004、9140A27020211DZ5102); 教育部科学技术研究重大项目(313018); 安徽省科技计划重点项目(1301022036); 安徽省自然科学基金项目(1608085QF157)

能良好的四项 5 阶 Nuttall 窗进行加窗插值 FFT 分析。利用峰值谱线频点附近所含幅值信息量最大的两条谱线, 加上外围的两条谱线, 进行四谱线插值 FFT 的谐波分析。运用多项式拟合推导出实用的四谱线插值修改公式, 进一步减小了栅栏效应引起的误差。针对 FFT 变换中需要计算每条谱线的幅值, 即求每个幅值对应的复数的模, 与双谱线或三谱线插值相比, 四谱线插值算法的运算量大大增加。文献[15]推导出在忽略谐波间泄漏影响时, 主瓣内任意相邻谱线的相位差为 π (或 $-\pi$)。本文利用主瓣内相邻谱线的相位相差 π (或 $-\pi$) 的特性, 通过减少四谱线插值修正公式中复数的求模运算, 推导出与常规的四谱线插值修正公式几乎一致的改进修正公式。仿真结果表明, 与文献[16]中基于 Blackman 窗的四谱线插值算法相比, 本文推导出的基于四项 5 阶 Nuttall 窗四谱线插值 FFT 算法和改进算法均具有更高的分析精度。利用主瓣内相邻谱线的相位特性推导出的改进四谱线插值算法, 拥有与常规算法几乎相同的分析精度, 但计算量大大减少。

1 Nuttall 窗特性

非同步采样时, 为降低频谱泄漏对谐波测量的影响, 选用旁瓣峰值电平低且旁瓣衰减速率大的窗函数对信号进行加窗处理。Nuttall 窗是一种余弦组合窗, 具有良好的旁瓣特性。其时域表示为

$$w_N(n) = \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m a_m \cos(2\pi n \cdot m / N) \quad (1)$$

其中: M 为窗函数项数; $n=0, 1, \dots, N-1$; a_m 满足条件 $\sum_{m=0}^{M-1} a_m = 1$, $\sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m a_m = 0$ 。Nuttall 窗的频谱函数为

$$W_N(w) = \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \frac{a_m}{2} [W_R(w - \frac{2\pi m}{N}) + W_R(w + \frac{2\pi m}{N})] \quad (2)$$

其中, $W_R(w) = \frac{\sin(wN/2)}{\sin(w/2)} e^{-j\frac{N-1}{2}w}$ 为矩形窗频谱函数。

表 1 为 Nuttall 窗及其他余弦窗的旁瓣特性, 可知 Blackman 窗旁瓣峰值电平太高, Blackman-Harris 窗和四项最低旁瓣 Nuttall 窗的旁瓣渐近衰减速率太小, 它们的旁瓣特性均不理想。与四项 1 阶 Nuttall 窗相比, 四项 3 阶 Nuttall 窗和 5 阶 Nuttall 窗的旁瓣衰减速率更快, 旁瓣特性更理想。四项 5 阶 Nuttall 窗的旁瓣峰值电平为 -60.95 dB(负号表示旁瓣峰值电平低于主瓣电平), 高于四项 3 阶 Nuttall 窗, 但其旁瓣衰减速率更快, 为 42 dB/oct, 由图 1 可知, 四项 5 阶 Nuttall 窗旁瓣特性更好, 更有效地抑制了

频谱泄漏。因此, 本文选用四项 5 阶 Nuttall 窗对输入信号进行四谱线插值 FFT 处理。

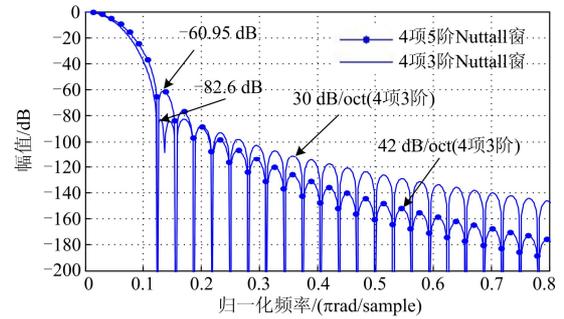


图 1 两种 Nuttall 窗的频谱对比图

Fig. 1 Comparison of spectrum of the two Nuttall windows

表 1 几种余弦窗的旁瓣特性

Table 1 Sidelobe characteristics of several cosine windows

窗函数	主瓣宽度	旁瓣峰值电平/ dB	旁瓣衰减速率/ (dB/oct)
Blackman 窗	$12\pi/N$	-58	18
Blackman-Harris 窗	$16\pi/N$	-92	6
4 项最低旁瓣 Nuttall 窗	$16\pi/N$	-98.2	6
4 项 1 阶 Nuttall 窗	$16\pi/N$	-93.3	18
4 项 3 阶 Nuttall 窗	$16\pi/N$	-82.6	30
4 项 5 阶 Nuttall 窗	$16\pi/N$	-60.95	42

2 基于 Nuttall 窗的四谱线插值算法

2.1 常规的四谱线插值算法

以采样频率 f_s 对频率为 f_0 , 幅值为 C , 初相位为 φ_0 的单一频率信号 $x(t)$ 进行均匀采样, 经模数变换后所得离散时间信号为

$$x(n) = C \sin(2\pi n f_0 / f_s + \varphi_0) \quad (3)$$

对信号 $x(n)$ 加 $w_N(n)$ 截断得 $x_w(n) = x(n)w_N(n)$, 对 $x_w(n)$ 进行频率连续的傅里叶变换得

$$X_w(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)w_N(n)e^{-j2\pi n f} = \frac{C}{2j} \{ e^{j\varphi_0} W_N[\frac{2\pi}{f_s}(f - f_0)] - e^{-j\varphi_0} W_N[\frac{2\pi}{f_s}(f + f_0)] \} \quad (4)$$

式中: $W_N(f)$ 是 Nuttall 窗 $w_N(n)$ 的频率连续的频谱函数。

对式(4)进行离散采样, 并忽略负频点处频峰的旁瓣影响^[17], 得 $x_w(n)$ 的离散频谱表达式

$$X(k\Delta f) = C e^{j\varphi_0} W_N[2\pi(k\Delta f - f_0) / f_s] / (2j) \quad (5)$$

式中, $\Delta f = f_s / N$ 为频率分辨率, N 为采样点数。

非同步采样时, $k = f_0 / \Delta f = N f_0 / f_s$ 为非整数, 即 f_0 为频率分辨率的非整数倍, 此时 FFT 产生频谱泄漏, 即采样值取不到峰值谱线频点, 如图 2。设峰值频点 k 附近的最大和次最大谱线分别为第 k_p 和 k_{p+1} 条

($k_{p+1}=k_p+1$), 这两条谱线的幅值含量最大, 其外围的两条谱线记为第 k_{p-1} 和 k_{p+2} 条($k_{p-1} \leq k \leq k_{p+1} \leq k_{p+2}$, $k_{p+2}=k_{p+1}+1$, $k_p=k_{p-1}+1$)。这四条谱线的幅值记为 $y_{p-1}=|X(k_{p-1}\Delta f)|$ 、 $y_p=|X(k_p\Delta f)|$ 、 $y_{p+1}=|X(k_{p+1}\Delta f)|$ 和 $y_{p+2}=|X(k_{p+2}\Delta f)|$ 。引入参数 $\alpha=k-k_p-0.5$ ($-0.5 \leq \alpha \leq 0.5$), $\beta=((2y_{p+1}+y_{p+2})-(2y_p+y_{p-1}))/(y_{p-1}+2y_p+2y_{p+1}+y_{p+2})$ 。令 $R=2|W_N(2\pi(-\alpha+0.5)/N)|+|W_N(2\pi(-\alpha+1.5)/N)|$, $S=2|W_N(2\pi(-\alpha-0.5)/N)|+|W_N(2\pi(-\alpha-1.5)/N)|$, 根据公式(5)并将 α 带入, 得

$$\beta = (R - S)/(R + S) \quad (6)$$

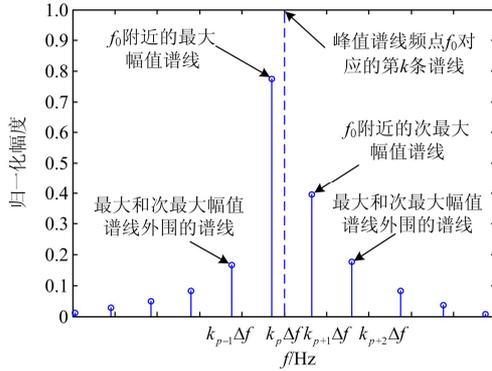


图2 非同步采样频谱

Fig. 2 Spectrum of non-synchronous sampling

记式(6)的反函数 $\alpha=f^{-1}(\beta)$, 实际计算时, 通常先求出 β , 由 $\alpha=f^{-1}(\beta)$ 计算出 α 。由于峰值频点附近的 k_p 、 k_{p+1} 两条谱线所含幅值信息量最大, 计算时给这两条谱线更大的加权值, 四条谱线的加权值分别为 1、2、2、1。幅值的修正公式为

$$C = \frac{2(y_{p-1} + 2y_p + 2y_{p+1} + y_{p+2})}{S + R} \quad (7)$$

当 $N \gg 1$ 时, 式(7)化简为

$$C = N^{-1}(y_{p-1} + 2y_p + 2y_{p+1} + y_{p+2})g(\alpha) \quad (8)$$

频率修正公式为

$$f_0 = k\Delta f = (\alpha + k_p + 0.5)\Delta f \quad (9)$$

由式(5)得初相位修正公式

$$\varphi_0 = \arg[X(k\Delta f)] + \frac{\pi}{2} - \arg\left[W_N\left(\frac{2\pi(k\Delta f - f_0)}{f_s}\right)\right] \quad (10)$$

对 Nuttall 窗进行 DFT 变换, 即将 $w=2\pi k/N$ 带入式(2)得

$$W_N\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \frac{a_m}{2} \left[W_R\left(\frac{2\pi}{N}(k-m)\right) + W_R\left(\frac{2\pi}{N}(k+m)\right) \right] = e^{-j\pi k} \sin(\pi k) \left[\sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \frac{a_m}{2} \frac{\sin(2\pi k/N)}{\sin(\pi(k-m)/N)\sin(\pi(k+m)/N)} \right] \quad (11)$$

其中, $W_R\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \frac{\sin(\pi k)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)} e^{-j\pi k}$, 且有 $N \gg 1$ 。

本文选用四项 5 阶 Nuttall 窗的系数为 $a_0=0.3125$, $a_1=0.46875$, $a_2=0.1875$, $a_3=0.03125$, 其 DFT 变换为

$$W_N\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = 0.3125 W_R\left(\frac{2\pi}{N}k\right) - 0.234375 \left[W_R\left(\frac{2\pi}{N}(k-1)\right) + W_R\left(\frac{2\pi}{N}(k+1)\right) \right] + 0.09375 \left[W_R\left(\frac{2\pi}{N}(k-2)\right) + W_R\left(\frac{2\pi}{N}(k+2)\right) \right] - 0.015625 \left[W_R\left(\frac{2\pi}{N}(k-3)\right) + W_R\left(\frac{2\pi}{N}(k+3)\right) \right] \quad (12)$$

将 $k=-\alpha \pm 1.5$ 、 $-\alpha \pm 0.5$ 带入式(12), 结合式(11), 求出 $|W_N(2\pi(-\alpha \pm 1.5)/N)|$ 和 $|W_N(2\pi(-\alpha \pm 0.5)/N)|$, 得到 R 和 S , 带入式(6), 在 $[-0.5, 0.5]$ 内取一组 α , 求得相应的 β 值, 调用 polyfit(β, α, m) 函数进行多项式拟和求出 $\alpha=f^{-1}(\beta)$ 。结合式(7)、式(8), 根据 α 求得相应的 $g(\alpha)$, 调用 polyfit($\alpha, g(\alpha), n$) 函数, 求出多项式 $g(\alpha)$ 的系数。本文采用的四项 5 阶 Nuttall 窗四谱线插值修正公式为

$$\alpha = 2.3754098361\beta + 0.43478583366\beta^3 + 0.19134226954\beta^5 + 0.1102881672\beta^7 + 0.07913073235\beta^9 \quad (13)$$

$$g(\alpha) = 1.344567506 + 0.24204761293\alpha^2 + 0.0237890545\alpha^4 + 0.001739039212\alpha^6 \quad (14)$$

实际运算时, 相位修正公式为

$$\varphi_0 = \arg[X(k_i\Delta f)] + \frac{\pi}{2} - \pi[\alpha - 0.5(-1)^i], i=1,2,3,4 \quad (15)$$

2.2 改进的四谱线插值算法

文献[15]推导出三谱线插值时, 窗函数主瓣内三条相邻谱线间的相位差为 π (或 $-\pi$), 本文亦利用谱线的相位特性对四谱线插值算法进行改进。为方便起见, 对于式(11)令

$$F_N\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sin(\pi k) \cdot \left[\sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \frac{a_m}{2} \frac{\sin(2\pi k/N)}{\sin(\pi(k-m)/N)\sin(\pi(k+m)/N)} \right] \quad (16)$$

则 $W_N(2\pi k/N) = F_N(2\pi k/N) e^{-j\pi k}$ 。

根据式(5)、式(16)有

$$X(k_p \Delta f) = \frac{C}{2j} e^{j\varphi_0} W_N [2\pi(k_p \Delta f - f_0) / f_s] = \frac{C}{2j} e^{j\varphi_0} W_N \left[\frac{2\pi}{N} (k_p - k) \right] = \frac{C}{2j} e^{j(\varphi_0 - \pi(k_p - k))} F_N \left[\frac{2\pi}{N} (k_p - k) \right] \quad (17)$$

第 k_p 条谱线的相位为

$$\arg[X(k_p \Delta f)] = \varphi_0 - \pi(k_p - k) - \pi/2 \quad (18)$$

同理得第 k_{p-1} 条谱线的相位为 $\arg[X(k_{p-1} \Delta f)] = \varphi_0 - \pi(k_{p-1} - k) - \pi/2$, 两相位差为

$$\arg[X(k_p \Delta f)] - \arg[X(k_{p-1} \Delta f)] = \pi(k_{p-1} - k_p) = -\pi \text{ 或} \\ \arg[X(k_{p-1} \Delta f)] - \arg[X(k_p \Delta f)] = \pi(k_p - k_{p-1}) = \pi \quad (19)$$

由式(19)可知, 第 k_p 和 k_{p-1} 条谱线相位相差 π (或 $-\pi$), 同理可得 k_p 和 k_{p+1} 条, k_{p+1} 和 k_{p+2} 条谱线的相位均相差 π (或 $-\pi$), 即任意相邻谱线对应的向量的方向相反(相差 π 和 $-\pi$ 在效果上一样), 四条谱线用向量表示图如图 3, 假设 $X(k_p \Delta f) = y_p e^{j\varphi}$ 。

根据 $e^{\pm j\pi} = -1$, $e^{\pm j2\pi} = 1$, 有

$$|X(k_{p-1} \Delta f) - 2X(k_p \Delta f) + 2X(k_{p+1} \Delta f) - X(k_{p+2} \Delta f)| = |y_{p-1} e^{j(\varphi+\pi)} - 2y_p e^{j\varphi} + 2y_{p+1} e^{j(\varphi-\pi)} - y_{p+2} e^{j(\varphi-2\pi)}| = y_{p-1} + 2y_p + 2y_{p+1} + y_{p+2} \quad (20)$$

$$|2X(k_{p+1} \Delta f) - X(k_{p+2} \Delta f)| = |2y_{p+1} e^{j(\varphi-\pi)} - y_{p+2} e^{j(\varphi-2\pi)}| = 2y_{p+1} + y_{p+2} \quad (21)$$

$$|2X(k_p \Delta f) - X(k_{p-1} \Delta f)| = |2y_p e^{j\varphi} - y_{p-1} e^{j(\varphi+\pi)}| = 2y_p + y_{p-1} \quad (22)$$

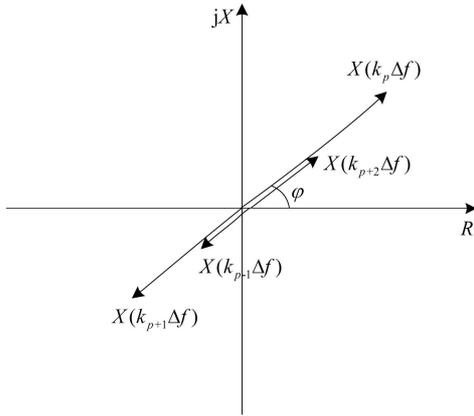


图 3 主瓣内相邻四条谱线相位特性图

Fig. 3 Phase relationship of four adjacent spectrum lines in major lobe

引入的参数 $R = 2|W_N(2\pi(k_{p+1}-k)/N)| + |W_N(2\pi(k_{p+2}-k)/N)| = (2/C) \times (2|X(k_{p+1} \Delta f)| + |X(k_{p+2} \Delta f)|)$, 有两次求模运算, 同理 S 也有两次求模运算, 若按式(6)求参数 β 需要计算八次模值。同理按式(7)求修正公式, 也

需要计算八次模值, 使四谱线插值 FFT 算法运算量大大增加。根据式(20)、式(21)和式(22), 将式(6)改为

$$\beta = \frac{(2y_{p+1} + y_{p+2}) - (2y_p + y_{p-1})}{y_{p-1} + 2y_p + 2y_{p+1} + y_{p+2}} = \frac{|2X(k_{p+1} \Delta f) - X(k_{p+2} \Delta f)| - |2X(k_p \Delta f) - X(k_{p-1} \Delta f)|}{|X(k_{p-1} \Delta f) - 2X(k_p \Delta f) + 2X(k_{p+1} \Delta f) - X(k_{p+2} \Delta f)|} \quad (23)$$

同理式(7)改为

$$C = \frac{2(y_{p-1} + 2y_p + 2y_{p+1} + y_{p+2})}{S + R} = \frac{2|X(k_{p-1} \Delta f) - 2X(k_p \Delta f) + 2X(k_{p+1} \Delta f) - X(k_{p+2} \Delta f)|}{S + R} \quad (24)$$

改进式(23)只需求 3 次模值, 为式(6)求模运算的 3/8, 幅值修正公式(24)只需求 5 次, 为式(7)的 5/8。利用改进算法求出的四谱线插值修正公式为

$$\alpha = 2.3754098361\beta + 0.43478583366\beta^3 + 0.19134226975\beta^5 + 0.1102881598\beta^7 + 0.079130817318\beta^9 \quad (25)$$

$$g(\alpha) = 1.344567506 + 0.24204761293\alpha^2 + 0.0237890545\alpha^4 + 0.001739039212\alpha^6 \quad (26)$$

需要指出的是, 改进四谱线算法和常规算法在幅值之和的计算方式上有所不同, 比较式(13)、式(14)和式(25)、式(26)可知, 两种方法得出的修正公式几乎一致, 但改进算法的运算量大大减少。

以上是对单一信号分量进行的插值 FFT 分析, 是在忽略相邻频率信号的相互影响下进行的。实际的电网中可能突然出现间谐波或次谐波, 进行 FFT 分析时, 非整数次谐波产生的长范围频谱泄漏会叠加到相邻的整数次谐波的离散序列中, 影响到整数次谐波的检测。对电力信号而言, 非整数次谐波的幅值非常小, 其相邻的整数次谐波也会影响到 FFT 算法对非整数次谐波的检测, 甚至会“淹没”间谐波或次谐波。本文选用的四项 5 阶 Nuttall 窗具有旁瓣渐近衰减速率快, 旁瓣峰值较低等特性, 能有效抑制相邻频率信号之间频谱泄漏的影响, 采用本文算法进行谐波分析的具体步骤为:

(1) 对时域信号进行均匀采样, 得离散无限长序列。

(2) 对离散序列加窗截断后进行 FFT 分析, 获得各离散频点处的值。

(3) 在各离散峰值谱线附近寻找最大和次最大幅值谱线, 以及外围的两条谱线, 获得四条谱线的幅值。

(4) 根据四条谱线的幅值信息, 分别用常规的四

谱线插值算法和改进的四谱线插值算法计算包含非整数次谐波在内的各频率信号的参数。

3 仿真实验及结果分析

3.1 四条谱线相位差仿真

改进算法的前提是主瓣内四条谱线间的相位差为 π (或 $-\pi$)，因此首先对此结论进行仿真验证。设信号 $x(t)=220\sin(2\pi ft+\varphi)$ ， φ 在 $[0, 2\pi]$ 之间变化，变化步长为 $\pi/20$ ， f 在 49.5 Hz 到 50.5 Hz 之间变化，变化步长为 0.1 Hz。以采样频率 $f_s=3\ 000$ Hz，采样点数 $N=512$ ，对序列加四项 5 阶 Nuttall 窗并进行 FFT 变换，计算第 k_{p-1} 和 k_p 条谱线间的相位差，记为 $\Delta\varphi_1$ ， k_p 和 k_{p+1} 间相位差记为 $\Delta\varphi_2$ ， k_{p+1} 和 k_{p+2} 间相位差记为 $\Delta\varphi_3$ ，相位差如图 4 所示。

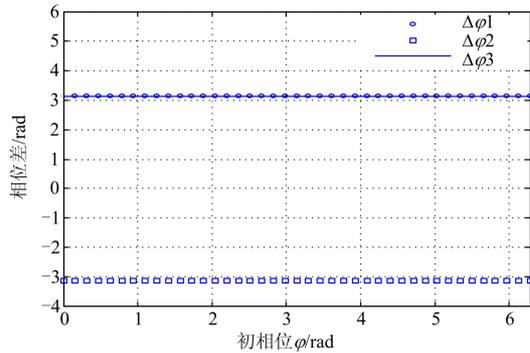


图 4 $f=50.1$ Hz 时主瓣内相邻四条谱线间的相位差
Fig. 4 Phase difference of four adjacent spectrum lines in major lobe at $f=50.1$ Hz

由图 4 知， $f=50.1$ Hz， φ 在 $[0, 2\pi]$ 之间变化时，主瓣内相邻四条谱线的相位差始终为 π (或 $-\pi$)。 f 取其他频率时情况相同，限于篇幅此处不再一一说明。

3.2 常规算法与改进算法仿真分析

为了验证本文推导的常规四谱线插值算法与改进四谱线插值算法的有效性，采用文献[16]给出的电网电量信号，并与该文献中的基于 Blackman 窗的四谱线插值 FFT 算法进行比较。采样频率 $f_s=5\ 120$ Hz，采样点数 $N=1\ 024$ 。信号中各次谐波的幅值、频率和相位如表 2。分析结果如表 3、表 4 所示。表 5、表 6 分别为幅值和相位的测量误差，图表中的 $aE-b$ 表示 $a \times 10^{-b}$ 。

由表 5、表 6 知，本文推导的基于四项 5 阶 Nuttall 窗四谱线插值算法的计算结果比 Blackman 窗算法具有更高的精度。比较四谱线插值 FFT 变换的常规算法与改进算法可知，两者具有几乎一致的计算结果，其分析精度非常接近，但改进算法根据式(23)

求参数 β ，进而求 α 并进行幅值修正，求模运算大大减少。以 Matlab R2013a 进行仿真计算所需时间为例，改进算法检测本文信号所需时间为 0.012 s，比常规算法少 0.007 s。因此，改进算法在保证计算精度的情况下，有效提高了算法的响应速度。

表 2 基波和各次谐波的频率、幅值和相位

Table 2 Frequency, amplitude and phase of the fundamental wave and every harmonic signal

谐波次数 n	频率/Hz	幅值/V	相位/(°)
1	50.1	220	10
3	150.3	35	20
5	250.5	27	40
7	350.7	24	60
9	450.9	20	90
11	551.1	17	130
13	651.3	15	170
15	751.5	12	230
17	851.7	10	280

表 3 不同加窗插值算法的幅值结果

Table 3 Amplitude results of different window interpolation algorithms

谐波次数 n	interpolation algorithms		
	Blackman 窗四谱线	常规的四项 5 阶 Nuttall 窗四谱线	改进的四项 5 阶 Nuttall 窗四谱线
1	220.000 000 29	219.999 999 891	219.999 999 891
3	35.000 000 38	35.000 000 064	35.000 000 064
5	27.000 000 09	26.999 999 987	26.999 999 988
7	24.000 000 03	23.999 999 949	23.999 999 950
9	19.999 999 90	19.999 999 955	19.999 999 955
11	17.000 000 07	16.999 999 977	16.999 999 977
13	15.000 000 02	15.000 000 004	15.000 000 004
15	12.000 000 03	12.000 000 010	12.000 000 010
17	10.000 000 03	10.000 000 013	10.000 000 013

表 4 不同加窗插值算法的相位结果

Table 4 Phase results of different window interpolation algorithms

谐波次数 n	interpolation algorithms		
	Blackman 窗四谱线	常规的四项 5 阶 Nuttall 窗四谱线	改进的四项 5 阶 Nuttall 窗四谱线
1	9.999 999 91	9.999 999 96	9.999 999 96
3	19.999 999 99	19.999 999 99	19.999 999 99
5	39.999 999 87	39.999 999 96	39.999 999 95
7	59.999 999 91	60.000 000 05	60.000 000 06
9	89.999 999 87	90.000 000 09	90.000 000 07
11	130.000 000 08	130.000 000 06	130.000 000 06
13	170.000 000 15	170.000 000 13	170.000 000 13
15	-129.999 999 99	-129.999 999 98	-129.999 999 99
17	-79.999 999 94	-80.000 000 03	-80.000 000 03

表 5 不同加窗插值算法的幅值误差
Table 5 Amplitude errors of different window interpolation algorithms

谐波次数 n	interpolation algorithms		
	Blackman 窗四谱线	常规的四项 5 阶 Nuttall 窗四谱线	改进的四项 5 阶 Nuttall 窗四谱线
1	2.9E-7	-1.09E-7	-1.09E-7
3	3.8E-7	6.4E-8	6.4E-8
5	9E-8	-1.3E-8	-1.2E-8
7	3E-8	-5.1E-8	-5.0E-8
9	-1E-7	-4.5E-8	-4.5E-8
11	7E-8	-2.3E-8	-2.3E-8
13	2E-8	4.0E-9	4.0E-9
15	3E-8	1.0E-8	1.0E-8
17	3E-8	1.3E-8	1.3E-8

表 6 不同加窗插值算法的相位误差

Table 6 Phase errors of different window interpolation algorithms

谐波次数 n	interpolation algorithms		
	Blackman 窗四谱线	常规的四项 5 阶 Nuttall 窗四谱线	改进的四项 5 阶 Nuttall 窗四谱线
1	-9.0E-8	-4.0E-8	-4.0E-8
3	-1.0E-8	-1.0E-8	-1.0E-8
5	-1.3E-7	-4.0E-8	-5.0E-8
7	-9.0E-8	5.0E-8	6.0E-8
9	-1.3E-7	9.0E-8	7.0E-8
11	8.0E-8	6.0E-8	6.0E-8
13	1.5E-7	1.3E-7	1.3E-7
15	1.0E-8	2.0E-8	1.0E-8
17	6.0E-8	-3.0E-8	-3.0E-8

3.3 含非整数次谐波的 FFT 分析

当电网中出现非整数次谐波时, FFT 算法能利用各峰值谱线频点周围谱线进行插值分析。分别用基于 Blackman 窗的四谱线插值 FFT 算法, 与本文算法对表 7 信号进行分析, 采样频率 $f_s=5120$ Hz, 采样点数 $N=1024$ 。表 8、表 9 分别为幅值、相位的测量误差。

表 7 信号的频率、幅值和相位

Table 7 Frequency, amplitude and phase of the sampling signal

谐波类型	频率/Hz	幅值/V	相位/(°)
基波	50.1	220	10
间谐波	80.16	2.8	36
三次谐波	150.3	35	20
间谐波	175.35	2.1	57
五次谐波	250.5	27	40
七次谐波	350.7	24	60

表 8 含间谐波时不同算法的幅值误差

Table 8 Amplitude errors of different window interpolation algorithms with inter-harmonics

谐波类型	interpolation algorithms with inter-harmonics		
	Blackman 窗四谱线	常规的四项 5 阶 Nuttall 窗四谱线	改进的四项 5 阶 Nuttall 窗四谱线
基波(50.1 Hz)	9.89E-5	1.67E-6	1.67E-6
间谐波(80.16 Hz)	8.9E-3	6.3E-3	6.3E-3
三次谐波(150.3 Hz)	2.2E-3	8.8E-4	8.9E-4
间谐波(175.35 Hz)	9.7E-3	3.0E-3	3.1E-3
五次谐波(250.5 Hz)	1.6E-6	1.4E-7	1.4E-7
七次谐波(350.7 Hz)	3.4E-8	-5.1E-8	-5.0E-8

间谐波相对于基波和谐波而言幅值较小。表 7 中, 基波与 3 次、3 次和 5 次谐波之间出现间谐波时, 各整数次谐波与间谐波之存在频谱泄漏, 从而对测量精度产生影响。对比表 5、表 6 和表 8、表 9 可知, 间谐波存在时, 基波、3、5 次谐波的幅值和相位的测量误差大大增加, 说明间谐波的频谱泄漏影响了 FFT 算法对相邻整数次谐波的分析, 同时 FFT 算法对间谐波的分析精度与表 5、表 6 中相比也大大降低, 如 80.16 Hz 的频率信号的幅值的绝对误差大于 10^{-3} , 而表 5 中所有整数次频率信号的幅值的绝对误差在 $10^{-7} \sim 10^{-9}$, 这是因为幅值较大的整数次谐波的频谱泄漏也会影响到间谐波的检测。以上分析说明, 信号中出现频率临近的非整数次谐波时, FFT 算法对相邻的整数次和非整数次谐波的精度均大大降低。但是, 本文算法对所有频率信号的分析精度依然高于文献[16]中的基于 Blackman 窗的四谱线插值 FFT 算法, 验证了本文算法的有效性。

表 9 含间谐波时不同算法的相位误差

Table 9 Phase errors of different window interpolation algorithms with inter-harmonics

谐波类型	interpolation algorithms with inter-harmonics		
	Blackman 窗四谱线	常规的四项 5 阶 Nuttall 窗四谱线	改进的四项 5 阶 Nuttall 窗四谱线
基波(50.1 Hz)	-3.1E-4	1.93E-4	1.93E-4
间谐波(80.16 Hz)	1.1E-2	9.4E-3	9.4E-3
三次谐波(150.3 Hz)	-3.7E-2	9.0E-3	9.0E-3
间谐波(175.35 Hz)	4.6E-2	2.8E-2	2.7E-2
五次谐波(250.5 Hz)	5.0E-4	-3.2E-5	-3.1E-5
七次谐波(350.7 Hz)	-9.0E-8	5.0E-8	6.0E-8

3.4 电网频率波动对算法的影响

根据本文算法中将时域信号离散化, 探寻离散峰值谱线附近的四条谱线并进行插值校正的特性, 即使电网频率, 尤其是基波频率出现波动时, 本文算法将重新对波动后的信号离散化, 并利用新的频谱峰值频点附近的四条谱线进行修正, 获得信号各

参数,实现对动态信号的分析。设基波频率在 49.5~50.5 Hz 波动时,采用基于四项 5 阶 Nuttall 窗的改进四谱线插值算法对文献[16]的电网电量信号进行分析,基波频率的绝对误差均小于 1×10^{-8} Hz,各次谐波信号的幅值与相位的相对误差如图 5、图 6 所示。

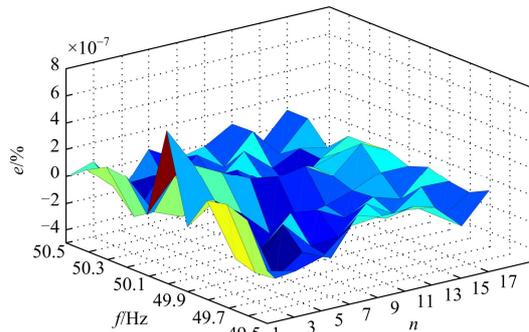


图 5 频率波动时幅值相对误差图

Fig. 5 Amplitude relative error distribution under frequency fluctuation

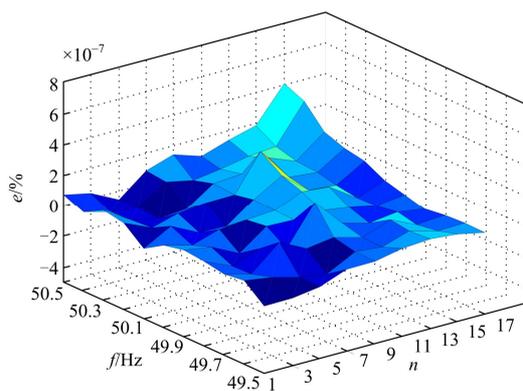


图 6 频率波动时相位相对误差图

Fig. 6 Phase relative error distribution under frequency fluctuation

由图 6、图 7 知,基波频率波动时,采用改进四谱线插值算法对信号进行谐波分析,幅值的相对误差不超过 $8 \times 10^{-7}\%$,相位的相对误差不超过 $6 \times 10^{-7}\%$ 。可见本文算法能有效抑制基波频率波动对谐波分析的影响,高精度地检测出谐波的各项参数。

4 结论

本文选用旁瓣性能良好的四项 5 阶 Nuttall 窗进行电力谐波的四谱线插值 FFT 分析,利用多项式拟合推导出实用的插值修正公式,并根据主瓣内相邻谱线的相位差为 π (或 $-\pi$) 的特性,推导出改进的四谱线插值算法。仿真结果验证了改进算法与常规算法具有几乎相同的计算精度,与文献[14]给出的基于

Blackman 窗的四谱线插值算法相比,抑制频谱泄漏的效果更好,精度更高,但改进四谱线插值算法的运算量大大减少。同时,本文算法能有效克服基波频率波动对谐波分析的影响,分析动态信号时仍具有较高的计算精度。

参考文献

- [1] 彭祥华,周群,曹晓燕.一种高精度的电网谐波/间谐波检测的组合优化算法[J].电力系统保护与控制,2014,42(23):95-101.
PENG Xianghua, ZHOU Qun, CAO Xiaoyan. A high precision combinational optimization algorithm of power grid harmonic/inter-harmonic signal detection[J]. Power System Protection and Control, 2014, 42(23): 95-101.
- [2] 姚致清,刘涛,张爱玲,等.直流融冰技术的研究及应用[J].电力系统保护与控制,2010,38(21):57-62.
YAO Zhiqing, LIU Tao, ZHANG Ailing, et al. Research & application on DC de-icing technology[J]. Power System Protection and Control, 2010, 38(21): 57-62.
- [3] 李国庆,王鹤,张慧杰.微电网中基于逆变电源控制的重要节点电能质量管理方法[J].电工技术学报,2014,29(2):177-183.
LI Guoqing, WANG He, ZHANG Huijie. Power quality management method based on inverter source control for important node in microgrid[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2014, 29(2): 177-183.
- [4] 孙鹏,杨永越.五点加权 FFT 介质损耗角测量算法的研究[J].高压电器,2015,51(3):88-92.
SUN Peng, YANG Yongyue. Five-point weighted FFT algorithm for measurement of dielectric loss angle[J]. High Voltage Apparatus, 2015, 51(3): 88-92.
- [5] 姚致清,于飞,赵倩,等.基于模块化多电平换流器的大型光伏并网系统仿真研究[J].中国电机工程学报,2013,33(36):27-33.
YAO Zhiqing, YU Fei, ZHAO Qian, et al. Simulation research on large-scale PV grid-connected systems based on MMC[J]. Proceedings of the CSEE, 2013, 33(36): 27-33.
- [6] 姚致清,赵倩,刘喜梅.基于准同步原理的逆变器并网技术研究[J].电力系统保护与控制,2011,39(24):123-131.
YAO Zhiqing, ZHAO Qian, LIU Ximei. Research on grid-connected technology of inverter based on quasi synchronous principle[J]. Power System Protection and Control, 2011, 39(24): 123-131.
- [7] 温和,腾召胜,王永,等.改进加窗插值 FFT 动态谐波分析算法及应用[J].电工技术学报,2012,27(12):270-273.

- WEN He, TENG Zhaosheng, WANG Yong, et al. Improved windowed interpolation FFT algorithm and application for power harmonic analysis[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2012, 27(12): 270-273.
- [8] 许珉, 杨阳, 陈飞, 等. 基于 Nuttall(I) 窗的插值 FFT 算法[J]. 电力系统保护与控制, 2011, 39(23): 44-47.
- XU Min, YANG Yang, CHEN Fei, et al. An interpolated FFT algorithm based on the Nuttall(I) window[J]. Power System Protection and Control, 2011, 39(23): 44-47.
- [9] 曾博, 唐求, 卿柏元, 等. 基于 Nuttall 自卷积窗的改进 FFT 谱分析方法[J]. 电工技术学报, 2014, 29(7): 59-65.
- ZENG Bo, TANG Qiu, QING Baiyuan, et al. Spectral analysis method based on improved FFT by Nuttall self-convolution window[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2014, 29(7): 59-65.
- [10] 周俊, 王小海, 祁才君. 基于 Blackman 窗函数的插值 FFT 在电网谐波信号分析中的应用[J]. 浙江大学学报(理学版), 2006, 33(6): 650-653.
- ZHOU Jun, WANG Xiaohai, QI Caijun. Estimation of electrical harmonic parameters by using the interpolated FFT algorithm based on Blackman window[J]. Journal of Zhejiang University (Science Edition), 2006, 33(6): 650-653.
- [11] 赵文春, 马伟明, 胡安. 电机测试中谐波分析的高精度 FFT 算法[J]. 中国电机工程学报, 2001, 21(12): 83-87.
- ZHAO Wenchun, MA Weiming, HU An. FFT algorithm with high accuracy for harmonic analysis in the electric machine[J]. Proceedings of the CSEE, 2001, 21(12): 83-87.
- [12] 曹敏, 熊浩, 刘然, 等. 基于 Rife-Vincent 窗的录波电流谐波分析方法[J]. 电网与清洁能源, 2013, 29(3): 7-11.
- CAO Min, XIONG Hao, LIU Ran, et al. Harmonic analysis of recorded current wave based on Rife-Vincent window[J]. Power System and Clean Energy, 2013, 29(3): 7-11.
- [13] 陈国志, 陈隆道, 蔡忠法. 基于 Nuttall 窗插值 FFT 的谐波分析方法[J]. 电力自动化设备, 2011, 31(4): 27-31.
- CHEN Guozhi, CHEN Longdao, CAI Zhongfa. Harmonic detection based on improved adaptive method and its performance study[J]. Electric Power Automation Equipment, 2011, 31(4): 27-31.
- [14] 卿柏元, 滕召胜, 高云鹏, 等. 基于 Nuttall 窗双谱线插值 FFT 的电力谐波分析方法[J]. 中国电机工程学报, 2008, 28(25): 153-157.
- QING Baiyuan, TENG Zhaosheng, GAO Yunpeng, et al. An approach for electrical harmonic analysis based on Nuttall window double-spectrum-line interpolation FFT[J]. Proceedings of the CSEE, 2008, 28(25): 153-157.
- [15] 蔡晓峰, 张鸿博, 鲁改凤. 应用三谱线插值 FFT 分析电力谐波的改进算法[J]. 电力系统保护与控制, 2015, 43(2): 33-38.
- CAO Xiaofeng, ZHANG Hongbo, LU Gaifeng. Improvement algorithm for harmonic analysis of power system using triple-spectrum-line interpolation algorithm based on window FFT[J]. Power System Protection and Control, 2015, 43(2): 33-38.
- [16] 郝柱, 顾伟, 褚建新, 等. 基于四谱线插值 FFT 的电网谐波检测方法[J]. 电力系统保护与控制, 2014, 42(19): 107-112.
- HAO Zhu, GU Wei, CHU Jianxin, et al. A power network harmonic detection method based on the four-spectrum-line interpolation FFT[J]. Power System Protection and Control, 2014, 42(19): 107-112.
- [17] 高云鹏, 滕召胜, 卿柏元. 基于 Kaiser 窗双谱线插值 FFT 的谐波分析方法[J]. 仪器仪表学报, 2010, 31(2): 287-291.
- GAO Yunpeng, TENG Zhaosheng, QING Baiyuan. Harmonic analysis based on Kaiser window double spectrum line interpolation FFT[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2010, 31(2): 287-291.

收稿日期: 2015-04-15; 修回日期: 2015-08-16

作者简介:

李得民(1990-), 男, 硕士研究生, 研究方向为电力系统谐波检测; E-mail: 1250466215@qq.com

何怡刚(1966-), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为复杂电网状态监测与健康诊断, 自动测试与诊断装备, 智能电网等。

(编辑 葛艳娜)