

微机保护实用快速开平方算法

唐剑¹, 董杰², 朱启晨²

(1. 浙江省杭州电力公司, 浙江 杭州 310002; 2. 北京四方继保自动化股份有限公司, 北京 100085)

摘要: 对于被开方数为两数平方和形式的开方运算, 传统简化开方算法精度不高, 不能满足工程需要。提出了一种利用泰勒级数展开式求取近似平方根的算法, 利用泰勒级数推导出计算公式, 选取一次多项式作为近似值带入该公式得到平方根。重点分析了一次多项式系数的选取原则和方法。通过分析系数在不同范围内取值时的最大误差, 得到误差最小的一次多项式系数。理论分析表明, 提出的算法与传统算法计算量相当, 但精度能提高4倍以上, 最大误差不超过0.05%, 满足微机保护装置需求。

关键词: 开平方; 开方; 快速算法; 牛顿迭代法; 微机保护

Fast SQRT algorithm of microcomputer protection

TANG Jian¹, DONG Jie², ZHU Qi-chen²

(1. Electric Power Corporation of Hangzhou, Hangzhou 310002, China;
2. Beijing Sifang Automation Co., Ltd, Beijing 100085, China)

Abstract: A new square root algorithm is proposed to improve the precision of the traditional simplified algorithm when the radicand is the sum of two squares. Taylor series is introduced to derive the formula which uses the first polynomial as the approximate value. The principle and method of selecting the coefficients of the polynomials is analyzed. The coefficients of the first polynomial with minimal error is obtained based on the analysis of maximal error when the coefficient is distributed in different scopes. The results of theoretical analysis show that the computation complexity of proposed algorithm is similar to the traditional method, but the precision is increased by 4 times. The maximal error is below the 0.05% and it meets the requirement of microprocessor protection.

Key words: square root (SQRT); evolution; fast algorithm; Newton iteration; microcomputer-based; protection

中图分类号: TM77; TM74 文献标识码: A 文章编号: 1674-3415(2010)23-0172-05

0 引言

随着芯片技术的迅速发展, 微机保护装置的硬件条件得到了很大改善。但是, 微机保护装置的内存、CPU速度仍然十分有限, 这对矛盾仍然是制约微机保护算法的重要因素。

开平方运算是微机保护装置最经常使用的算法之一。微机保护装置通常需要进行大量的开方运算来计算基波和各次谐波的有效值, 这是保护逻辑和其他算法的基础和前提。因此, 开方运算的计算速度和计算精度直接影响到微机保护的性能、保护处理流程和其他算法^[1]。

常见的开平方运算有牛顿迭代法和查表法。查表法的精度取决于表格区间的长度^[2]。为提高精度, 要求增加表格长度。这将导致占用较多的微机内存, 同时增加了查表时间。牛顿迭代法计算精度高, 但

计算量也不小, 而且如果初值选择不当, 迭代次数将很多, 耗时长。保护装置中电压电流的动态变化范围很大, 增加了初值的选择难度^[3]。

事实上, 微机保护装置中, 计算平方根主要是在傅氏算法计算出实部虚部之后进行。设 Re 、 Im 分别为傅氏算法计算出的实部、虚部, 则有效值计算公式为:

$$M = \sqrt{Re^2 + Im^2} \quad (1)$$

针对这种情况, 为了减小开方运算的计算量, 传统的简化算法^[4]为: 设: $L = \max\{|Re|, |Im|\}$, $S = \min\{|Re|, |Im|\}$, 则 M 近似为:

$$\hat{M} = L + \frac{5S^2}{3(3L + S)} \quad (2)$$

该算法的优点是计算量较小, 其最大相对误差

为 0.1735%。对于中低压系统的保护装置来说,一般都是保护与测控一体化装置。因此,虽然该算法可以满足保护的 3%~5%精度要求,但却不满足测量 0.2%的精度要求。

总的来说,目前还缺少一种精度和速度并优的开平方算法。为解决此问题,本文通过分析计算,给出了工程实用的开平方算法。理论分析表明,这些算法具有较高的精度,且计算量较小,可以满足微机保护测控装置的实际需要。

1 算法原理

设:

$$f(x) = x^2 - (L^2 + S^2) \quad (3)$$

M 是方程的一个根, C 为 M 的近似值。将 $f(x)$ 在点 C 处展开为泰勒级数^[3]:

$$f(x) = C^2 - (L^2 + S^2) + 2C(x - C) + (x - C)^2 \quad (4)$$

将根 $x=M$ 代入上式, 得

$$M = \frac{C^2 + (L^2 + S^2)}{2C} - \frac{(M - C)^2}{2C} \quad (5)$$

当 $|C - M| < \varepsilon$ 时, 上式中的第二项是二阶无穷小, 可忽略不计。设 \hat{M} 为 M 的近似值, 则有

$$\hat{M} = \frac{C^2 + (L^2 + S^2)}{2C} \quad (6)$$

式 (6) \hat{M} 的计算精度主要取决于初值 C 的选取。 C 值越接近 M , \hat{M} 的误差越小; 反之, C 值误差越大, \hat{M} 的误差也越大。

初值 C 可以采用一次多项式来拟合:

$$C = a \times L + b \times S \quad (7)$$

其相对误差为:

$$D_C = \frac{C - M}{M} = \frac{a \times L + b \times S}{\sqrt{L^2 + S^2}} - 1 \quad (8)$$

设: $r = \frac{S}{L}$, 代入式 (8) 得:

$$D_C = \frac{a + b \times r}{\sqrt{1 + r^2}} - 1 \quad (9)$$

1) 取 $a = 1$ 时:

$$C = L + b \times S \quad (10)$$

r 越小 (S 相对于 L 越小), 误差越小。当 $S=0$ 时, C 的误差为零。其误差曲线如图 1 所示。

2) 取 $a = \sqrt{2} - b$ 时:

$$C = (\sqrt{2} - b) \times L + b \times S \quad (11)$$

r 越大 (S 越接近于 L), 误差越小, 当 $S=L$ 时, C 的误差为零。其误差曲线如图 1 所示。

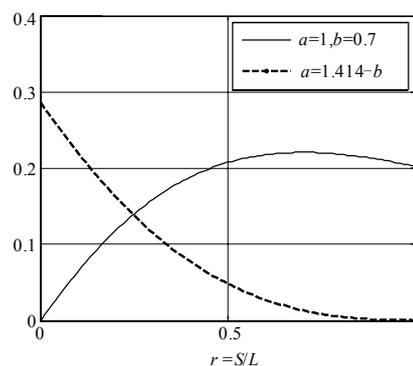


图 1 $C=a \times L + b \times S$ 相对误差 $|D|$

Fig.1 The relative error curve when $C=a \times L + b \times S$

事实上, 采用式 (7) 的一次多项式来作为初值 C , 很难保证式 (6) 的误差在 $r \in [0, 1]$ 整个区间都很小。但是, 如图 1 所示, 可以分别在 $r \in [0, \lambda]$ 和 $r \in [\lambda, 0]$ ($\lambda \in (0, 1)$) 区间各找到一个合适的初值 C 使得误差小于规定值。

1.1 算法 1 (当 r 较小时)

根据前述分析, 取初值 $C = L + b \times S = (1 + b \times r) \times L$, 则 r 越小, 误差也越小, 较适合 r 较小时的情况。为尽量减小计算量, 取 $b = 0$, 即: $C = L$, 代入式 (6), 整理后得:

$$\hat{M} = L + \frac{S^2}{2 \times L} \quad (12)$$

其误差为:

$$D = \frac{\hat{M}}{M} - 1 = \frac{1 + \frac{1}{2}r^2}{\sqrt{1 + r^2}} - 1 \quad (13)$$

$\frac{dD}{dr} = \frac{r^3}{2 \times (1 + r^2)^{3/2}} \geq 0$, 因此, $D(r)$ 单调增加。

又, 当 $r = 0$ 时, $D = 0$, 故 $r > 0$ 时, $D > 0$ 。因此, $|D|$ 的最大值应该在 r 的右边界处。相对误差曲线如图 2 所示。

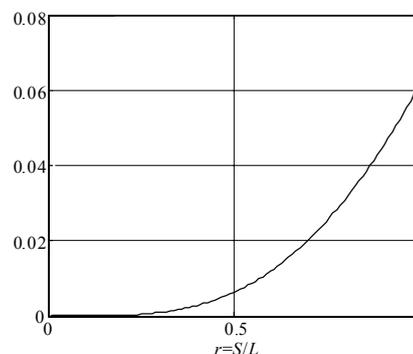


图 2 取 $C=L$ 时的相对误差 D

Fig.2 The relative error curve when $C=L$

如果要求最大相对误差小于 0.05%，即：

$$|D| = \frac{1 + \frac{1}{2}r^2}{\sqrt{1+r^2}} - 1 \leq 0.0005 \quad (14)$$

解得： $r \leq 0.25551$ 。

因此，当 $0 \leq r \leq 0.25$ 时，式 (12) 的最大相对误差小于 0.05%。这一精度对于微机保护来说已经足够。

1.2 算法 2 (当 r 较大时)

算法 2 只需考虑 $r \in [0.25, 1]$ 的情况。根据前述分析， $a = \sqrt{2} - b$ 时， $C = (\sqrt{2} - b) \times L + b \times S$ ，则 r 越接近于 1，误差越小，故较适合 r 较大时的情况。为方便起见，不妨先分析 C 本身的误差情况。将 a 代入式 (9)，整理后得 C 的误差为：

$$D_C = \frac{\sqrt{2} - (1-r) \times b}{\sqrt{1+r^2}} - 1 \quad (15)$$

$$D'_C = \frac{b - (\sqrt{2} - 1) \times r}{(1+r^2)^{3/2}} \quad (16)$$

令 $D'_C = 0$ ，得：

$$r_m = \frac{b}{\sqrt{2} - b} = \frac{b}{a} \quad (17)$$

当 $r < \frac{b}{\sqrt{2} - b}$ 时， $D'_C > 0$ ， $D_C = f(r)$ 单调

增加；当 $r > \frac{b}{\sqrt{2} - b}$ 时， $D'_C < 0$ ， $D_C = f(r)$ 单

调下降，故 $r_m = \frac{b}{\sqrt{2} - b} = \frac{b}{a}$ 为极大值点。将 r_m 代入式 (15)，得极大值为：

$$D_{C,max} = \sqrt{a^2 + b^2} - 1 \quad (18)$$

下面考察边界处的相对误差。当 $r=0.25$ 时，

$$D_{C,1/4} = \frac{4\sqrt{2} - 3b}{\sqrt{17}} - 1 \quad (19)$$

显然，边界值 $D_{C,1/4} = f(b)$ 随 b 单调下降，如

图 3 所示。令 $D_{C,1/4} = 0$ ， $b_{1/4} = \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{17}}{3} \approx 0.511$ 。

故： $b > 0.511$ 时， $D_{C,1/4} < 0$ ； $b < 0.511$ 时， $D_{C,1/4} > 0$ 。

由此可见，相对误差最大值可能在极值点，也可能在左边界，其具体位置取决于 b 。下面进行详细分析：

1) $b > 0.511$

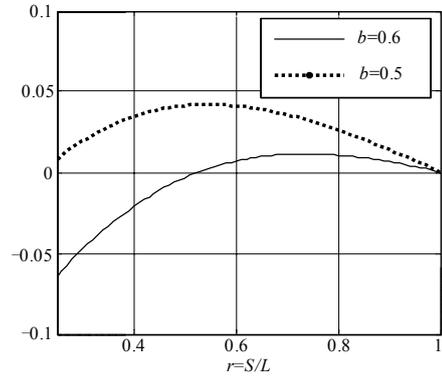


图 3 b 取不同值时的相对误差 D_C

Fig.3 The relative error curve when b take different value

由于 $b > 0.511$ 时， $D_{C,1/4} < 0$ ，故，最大相对误差出现的位置既可能在左边界 $r=0.25$ 处，也可能在 r_m 处。要获得最小的相对误差，应有 $|D_{C,max}| = |D_{C,1/4}|$ 。即满足：

$$\sqrt{a^2 + b^2} - 1 = 1 - \frac{4\sqrt{2} - 3b}{\sqrt{17}} \quad (20)$$

解此方程，得 2 个解： $b=2$ 或 $b=0.546329$ 。若 $b=2$ ， $D_{C,max} = 1.083$ ，故舍去。因此， $b=0.546329$ 是正解，此时， $a = \sqrt{2} - b = 0.86789$ 。将 a 和 b 代入式 (18)，得到最大相对误差为 $D_{C,max} = 0.025524$ 。

2) $b=0.511$

根据 b 求得 $a = \sqrt{2} - b = 0.903$ 。最大相对误差在 r_m 处，见图 4。 $r_m = \frac{b}{a} = 0.566$ ，将 a 和 b 代入式 (18)，得最大相对误差为： $D_{C,max} \approx 0.03765$ 。故 $b=0.511$ 时的最大相对误差大于 $b > 0.511$ 时的最大相对误差。因此， b 不能取为 0.511。

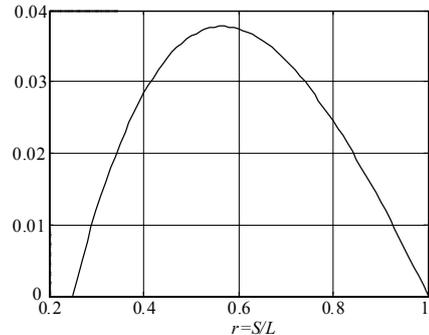


图 4 $b=0.511$ 时的相对误差 D_C

Fig.4 The relative error curve when b equal to 0.511

3) $b < 0.511$

由式 (18) 求得 $D_{C,max}$ 的一阶导数为：

$$D'_{C.\max} = \frac{2b - \sqrt{2}}{\sqrt{2b^2 - 2\sqrt{2}b + 2}} \quad (21)$$

令: $D'_{C.\max} = 0$, 得 $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

当 $b < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $D'_{C.\max} < 0$, $D_{C.\max} = f(b)$ 单调下降。

故, 当 b 小于某值时, $D_{C.\max}$ 将大于某一正数 ε 。现设 $\varepsilon = 0.03$, 代入式 (18), 整理得:

$$\sqrt{2 - 2\sqrt{2}b + 2b^2} - 1 = 0.03 \quad (22)$$

解此方程, 得到 2 个解: $b_1 = 0.5326$ 或

$b_2 = 0.8826$ 。其中 $b_2 > \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故舍去。所以,

$b_m = 0.5326$ 。由于 $b < 0.511 < b_m$, 故有 $D_{C.\max} > 0.03$, 即, 当 $b < 0.511$ 时, 其最大误差必大于 0.03。

综上分析, 对于 $r \in [0.25, 1]$, 取 $b = 0.546329$, $a = \sqrt{2} - b = 0.86789$ 时, 通过式 (7)、式 (6) 计算出的开平方值具有最小误差。下面分析其误差。

将式 (7) 代入式 (6) 得:

$$\hat{M} = \frac{C}{2} + \frac{(L^2 + S^2)}{2C} = \left(\frac{a+br}{2} + \frac{1+r^2}{2(a+br)} \right) \times L \quad (23)$$

$$D = \frac{\hat{M}}{M} - 1 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{a+br}{\sqrt{1+r^2}} + \frac{\sqrt{1+r^2}}{a+br} \right) - 1 \quad (24)$$

$$D' = \frac{b-ar}{2} \left(\frac{1}{(1+r^2)^{3/2}} - \frac{1}{(a+br)^{3/2}} \right) \quad (25)$$

可以证明: 当 $b = 0.546329$ 时,

$$\left(\frac{1}{(1+r^2)^{3/2}} - \frac{1}{(a+br)^{3/2}} \right) \neq 0。$$

设: $f = (1+r^2) - (a+br) = r^2 - br + 1 - a$, 则 $f' = 2r - b$, $f'' = 2$ 。由于 $f'' > 0$, 故 f 是凹的, f 有极小值。令 $f' = 0$, 得 $r = \frac{b}{2} = 0.273$, 极小值为 $f = 0.0575 > 0$ 。所以, 当 $r \in [0.25, 1]$ 时, 总有 $f > 0$, 即, $\left(\frac{1}{(1+r^2)^{3/2}} - \frac{1}{(a+br)^{3/2}} \right) \neq 0$, 证毕。

令 $D' = 0$, 由式 (23) 得: $r_m = \frac{b}{a} = 0.6295$,

代入式 (24) 得:

$$D_{\max} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) - 1 =$$

$$0.000318 = 0.0318\%$$

因此, 当 $0.25 \leq r \leq 1$ 时, 取 $b = 0.546329$, 则由式 (7) 和式 (6) 计算的最大相对误差小于 0.035%。

2 算法实现

1) 当 $L \geq 4S$ 时, 利用算法 1 式 (12) 直接计算: $\hat{M} = L + \frac{S^2}{2 \times L}$

2) 当 $L < 4S$ 时, 利用算法 2 进行计算。初值 $C = 0.546329L + 0.86789 = \frac{222L + 140S}{256}$, $\hat{M} = \frac{C}{2} + \frac{(L^2 + S^2)}{2C}$ 。

可按下述步骤依次计算:

$$C1 = 222L + 140S \quad (26)$$

$$C2 = \frac{C1}{512} \quad (27)$$

$$C3 = \frac{C1}{128} \quad (28)$$

$$\hat{M} = C2 + \frac{L^2 + S^2}{C3} \quad (29)$$

为尽量避免除法运算, 应该用定点数的移位进行除以 512 和除以 128 的计算。

3 简化算法

当 $L < 4S$ 时, 计算步骤略显繁多。如果精度要求不是很高, 则可以适当简化。取 $b = 0.5$, 则 $a = \sqrt{2} - b = 0.9142$, $C = aL + bS$, 代入式 (6) 中, 经整理, 得:

$$\hat{M} = \frac{1}{4} \left[S + \frac{256S + 608L}{256L + 140S} \times L \right] \quad (30)$$

极值点: $r_m = \frac{b}{a} = 0.5469$, 最大相对误差

$D_{\max} = 0.0008469 = 0.08469\%$ 。这个精度可满足一般工程需要, 其计算稍简单一些。

4 算法评价

对于 $M = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}$ 形式的开平方运算, 设: $L = \max\{|\text{Re}|, |\text{Im}|\}$, $S = \min\{|\text{Re}|, |\text{Im}|\}$, 则当 $L \geq 4 \times S$ 时, 可利用算法 1 式 (12) 直接计算, 其相对误差随 $r = S/L$ 单调增加, 在 $r = 0$ 处误差为零, 而在右边界 $r = 0.25$ 处达到最大, 最大误差不大于 0.05%。

当 $L < 4S$ 时, 利用算法 2 式 (26)~式 (29) 进行计算。其相对误差在 $r = L$ 时为零; 在极值点 $r_m = \frac{b}{a} = 0.6295$ 及左边界 $r = 0.25$ 处取得最大, 最大相对误差不超过 0.035%。

文献[4]选取的是 $C = L + \frac{S}{3}$, 代入式 (6) 中得到式 (2)。其相对误差在 $r = 0$ 时为零, 在右边界 $r = 1$ 处达到最大, 最大误差不大于 0.1735%, 在极

值点 $r_m = \frac{b}{a} = \frac{1}{3}$ 处，误差为 0.1388%。

上述算法的相对误差曲线见图 5。

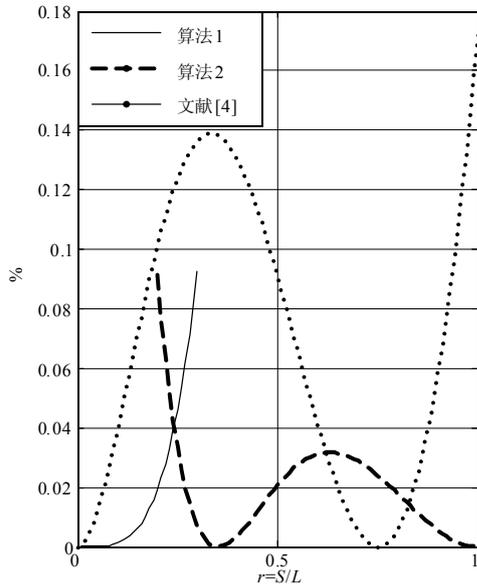


图 5 各种算法相对误差曲线 D%

Fig.5 The relative error curves of three algorithms

上述算法的运算量见表 1。

表 1 算法比较表

Tab.1 The comparison of three algorithms

	算法 1	算法 2	简化算法	文献[4]
乘法	1	4	3	4
除法	1	1	1	1
加法	1	3	3	2
移位	1	2	3	0
误差≤	0.050%	0.035%	0.085%	0.174%

从表 1 可见，算法 1 仅需 4 次计算，约为文献 [4] 的一半，但精度却提高了约 4 倍；算法 2 仅比文献 [4] 多了一次加法和两次移位操作，但精度提高了 5 倍多。因此，综合来看，本文提出的算法与文献 [4] 算法计算量基本相当，但精度却提高很多，足以满足微机保护装置的计算需要。

5 结语

本文针对傅氏算法中开平方运算耗时较大或占用内存较多问题，利用泰勒级数推导出了近似公式，并选取一次多项式作为初值。指出该算法的关键在于初值的选取。为了获得更高的计算精度和最小的计算量，提出了将开方运算区间分为两段分别计算的原则。对这两种情况提出了各自的初值选取方法。

当参与开方运算的两数相差较大时，选取在两

数相差最大（其中一个数为零）时误差为零的一次多项式作为初值。可以用一个最简单的算法即可满足精度要求，并根据误差不大于 0.05% 的精度要求，求出了两段的分界点在 1/4 处。

当两数相差不太大（4 倍以下）时，选取在两数相等时误差为零的一次多项式。其误差曲线为非单调，具体误差取决于两数的比值和一次多项式系数。分析了一次多项式系数在不同的范围内选取时的误差情况，找到了使得误差最小的系数取值范围。在此范围内，提出了根据边界值与局部极大值相等来确定多项式系数的方法。

最后，给出了算法的计算步骤。为了进一步简化计算，提出了一种简化算法，以满足不同的工程需要。

与传统的简化算法相比，本文提出的两种算法与文献 [4] 总体上基本相当，但精度却分别提高了约 4 倍（最大误差不大于 0.05%）和 5 倍多（最大误差不大于 0.035%），可以满足微机保护装置的计算要求。本文提出的算法即可适用于定点数计算，也可适用于浮点数计算。

参考文献

- [1] 姚斌, 陈玉涛, 李静正. 微机保护测控装置定点数的开方计算方法[J]. 电力自动化设备, 2007, 27 (11): 42-45.
YAO Bin, CHEN Yu-tao, LI Jing-zheng. Fixed-point square root algorithm for microprocessor-based protection and monitoring devices[J]. Electric Power Automation Equipment, 2007, 27 (11): 42-45.
- [2] 陈龙永, 梁兴东, 丁赤飏. 基于查表法的快速求浮点数平方根方法[J]. 微计算机信息, 2009, 25 (2-3): 205-206.
CHEN Long-yong, LIANG Xing-dong, DING Chi-yang. Study on square root algorithm in microcomputer protection[J]. Electric Power Automation Equipment, 2009, 25 (2-3): 205-206.
- [3] 杨鹏, 史旺旺. 电力系统微机保护中开平方浮点算法的改进[J]. 电力自动化设备, 2000, 20 (1): 7-8.
YANG Peng, SHI Wang-wang. Study on square root algorithm in microcomputer protection[J]. Electric Power Automation Equipment, 2000, 20 (1): 7-8.
- [4] 张举. 微机继电保护原理[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2004.

收稿日期: 2009-12-01; 修回日期: 2010-01-04

作者简介:

唐 剑 (1975-), 男, 硕士, 工程师, 主要从事电力系统继电保护运行管理工作;

董 杰 (1962-), 男, 硕士, 工程师, 主要从事继电保护及自动装置的研究和开发工作; E-mail: dongjie@sf-auto.com

朱启晨 (1964-), 男, 硕士, 工程师, 主要从事继电保护及自动装置的研究和开发工作。