

优化牛顿-拉夫逊算法雅可比矩阵的正交预处理方法研究

卓芳, 高仕斌

(西南交通大学电气工程学院, 四川 成都 610031)

摘要: 预处理雅可比矩阵可以大大改善潮流计算方程的收敛性和速度, 而寻找有效的预处理方法则是关键。研究了预处理的基本原理, 以最低条件数为主要依据, 提出正交方法预处理雅可比矩阵, 相对于目前较为流行的P-Q分解法, 理论上更加简单且操作方便。借助Matlab仿真工具, 预处理几个典型的IEEE多节点系统, 验证了正交预处理方法相对P-Q方法, 计算时间更短但具备相当的有效性和适用范围。

关键词: 潮流计算; 雅可比矩阵; 预处理; 正交; P-Q分解法

Study on orthogonal preconditioning method for Jacobian Matrix in Newton-raphson optimization

ZHUO Fang, GAO Shi-bin

(School of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract: The choice of preconditioning method is a key in the process of preconditioning Jacobian Matrix, which can improve convergence and quicken calculation speed in power flow calculation. This paper, based on minimum condition number, introduces orthogonal preconditioning method for Jacobian Matrix after analysis of basic principle in preconditioning. Compared to P-Q method which is considered as the most effective way, this method is much easier to operate in theory, and is finally testified its similar availability and applicability but less calculating time using Matlab Simulink Tool in certain typical IEEE systems.

Key words: power flow calculation; Jacobian Matrix; preconditioning; orthogonal method; P-Q

中图分类号: TM744 文献标识码: A 文章编号: 1674-3415(2010)03-0020-04

0 引言

潮流快速计算是实现电力系统实时、超实时控制的关键。牛顿-拉夫逊算法(以下简称牛拉法)是求解潮流非线性方程组比较有效的迭代计算方法, 目前较流行的适合对称问题的CG^[1]法(Conjugate Gradient)和适合非对称问题的GMRES^[2]法(Generalised Minimal Residual)都是双重迭代的牛拉法, 不管何种方法都有近80%的时间在反复求解高维形如 $J\Delta x = b$ 的稀疏性修正方程组^[3], 每次迭代都须重新形成雅可比矩阵, 矩阵元素计算又比较复杂, 使得潮流计算需要大量的时间。

为了提高牛拉法计算速度, 有必要对雅可比矩阵进行一些预处理, 旨在降低其条件数和改善谱特性, 进而加快其收敛速度。目前主要的方法有不完全LU分解法^[4]、平衡法^[5]、分块对角阵法和P-Q分解法^[6]等, 其中平衡法具有不确定性, 至今仍是数学界的难题, 而不完全LU法则存在填充量的选择问

题。相比之下, P-Q分解法的预处理矩阵容易得到, 处理起来简单方便。

根据雅可比矩阵预处理当中的条件数和迭代次数的关系^[7]: 条件数随着迭代次数的逐渐增大, 总的趋势是条件数逐渐减少进而趋近于极限值1。那么尽早地降低条件数, 对牛拉法的收敛性是大有裨益的, 而就减低矩阵的条件数而言, 我们熟知的正交方法可以使得矩阵的条件数降到最小为1。

本文尝试正交方法预处理雅可比矩阵, 在Matlab6.5系统平台上进行仿真分析, 以IEEE多节点系统为例, 相比P-Q分解法, 验证该方法的有效性和适用范围。

1 雅可比矩阵

1.1 雅可比矩阵的定义

牛拉法迭代公式的一般形式可写为:

$$J\Delta x = b \quad (1)$$

其中: J 为 $n \times n$ 的非奇异雅可比矩阵, Δx 为电压幅

值和相角的修正量; \mathbf{b} 为节点有功和无功功率的偏差量。

上述的迭代公式源于下面的方程组推导

$$\Delta P_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Delta P_i}{\partial \delta_j} \Delta \delta_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Delta P_i}{\partial U_j} \Delta U_j;$$

$$\Delta Q_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Delta Q_i}{\partial \delta_j} \Delta \delta_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Delta Q_i}{\partial U_j} \Delta U_j \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

每个PQ节点有两个变量 $\Delta \delta_i$ 和 ΔU_i 待求, 同时可列出两个方程。所以对全部节点可以写出迭代方程为:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{N} \\ \mathbf{K} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \mathbf{U}^{-1} \Delta U \end{bmatrix}$$

上式中的 $\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{N} \\ \mathbf{K} & \mathbf{L} \end{bmatrix}$ 即雅可比矩阵 \mathbf{J} 。

1.2 雅可比矩阵的条件数

在实际的求解中 \mathbf{J} 可能出现病态, 即它的条件数很大, 当用牛拉法求解时, 解非常不稳定。

这里的条件数定义为:

$$\text{Cond}(\mathbf{J}) = \|\mathbf{J}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{J}\|$$

$\|\cdot\|$ 表示矩阵的范数, 如果取矩阵的2-范数, 则条件数可以表示为

$$\text{Cond}(\mathbf{J}) = \frac{|\lambda(\mathbf{J})|_{\max}}{|\lambda(\mathbf{J})|_{\min}} \quad (2)$$

其中: $\lambda(\mathbf{J})_{\max}$, $\lambda(\mathbf{J})_{\min}$ 分别是 \mathbf{J} 的最大和最小特征模值; 并且 $\text{Cond}(\mathbf{J}) \geq 1$, 且若 \mathbf{J} 为正交阵, 则 $\text{Cond}(\mathbf{J}) = 1$ 。

根据条件数定义, 当其比较小时, 扰动引起解的相对误差一定小; 相反相对误差就可能大, 这样的矩阵就是病态方程。这样的方程组, 当用牛拉法算法求解时, 即使有解也不一定收敛。

2 雅可比矩阵的预处理方法

2.1 预处理矩阵

牛拉法的收敛性往往取决于矩阵 \mathbf{J} 的条件数和谱的性质, 为了改善这些性质, 时常会对线性方程组进行适当变换, 此过程称为预处理过程。具体是指选取一定的预处理矩阵 \mathbf{M} 处理 \mathbf{J} 得到 \mathbf{J}' , 并满足:

$$\mathbf{J}' \Delta \mathbf{x}' = \mathbf{b}' \quad (3)$$

假设: $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 = \mathbf{R}^{n \times n}$

其中: $\mathbf{J}' = \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{J} \mathbf{M}_2^{-1}$; $\Delta \mathbf{x}' = \mathbf{M}_2^{-1} \Delta \mathbf{x}$; $\mathbf{b}' = \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{b}$

希望 $\mathbf{M} \approx \mathbf{J}$, 且 \mathbf{M}_1 , \mathbf{M}_2 都是非奇异的, 而且比较容易求逆。所以问题就是如何选取好的预处理矩阵 \mathbf{M} 。

2.2 P-Q分解法

P-Q分解法是目前认为的比较有效的预处理方法, 它的预处理矩阵容易得到, 处理起来简单方便; 最重要的是它能够大大地降低 \mathbf{J} 的条件数和改善谱的性质, 很好地提高迭代算法的收敛性, 且系统越大, 效果越明显。

它的预处理矩阵是利用快速解耦潮流计算时的雅可比矩阵:

$$\Delta P / V = \mathbf{B}' V \Delta \theta$$

$$\Delta Q / V = \mathbf{B}'' \Delta V$$

\mathbf{B}' 和 \mathbf{B}'' 分别为解耦后对应于有功和无功的雅可比矩阵。记以矩阵 \mathbf{B}' 和 \mathbf{B}'' 为对角元素的分块对角阵为 \mathbf{M} :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}'' \end{bmatrix}$$

令式中 $\mathbf{M}_1 = \mathbf{I}$, 则得到预处理后的矩阵为:

$$\mathbf{J}' = \mathbf{I} \mathbf{J} \mathbf{M}_2^{-1} = \mathbf{I} \mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} \quad (4)$$

2.3 正交方法

上述原理很容易理解, 若取预处理矩阵 $\mathbf{M}_1 = \mathbf{I}$, $\mathbf{M}_2 = \mathbf{J}^{-1}$, 则预处理后的系数矩阵的条件数 $\text{cond}(\mathbf{J}') = \text{cond}(\mathbf{I} \mathbf{J} \mathbf{M}_2^{-1}) = 1$, 其特征值 $\lambda(\mathbf{J}') = 1$, 此时预处理的效果最为理想(无需迭代)。当然这在实际中是不可能的, 否则迭代法就成为直接法了。

但同时我们了解到当 $\text{Cond}(\mathbf{J}) = 1$ 时, 也可以是 \mathbf{J}' 为正交矩阵的情况, 此时牛拉法的收敛速度相比 P-Q分解处理是否会有优势呢?

目前正交矩阵变换主要用的是施密特方法, 假设雅可比矩阵 \mathbf{J} 为 $n \times n$ 形式:

$$\mathbf{J} = (\mathbf{I}_1 \quad \mathbf{I}_2 \quad \dots \quad \mathbf{I}_n)^T, \quad \text{其中 } \mathbf{I}_i = (j_{i1} \quad j_{i2} \quad \dots \quad j_{in})$$

并设正交变换后得到的雅可比矩阵为 \mathbf{J}_{orth} :

$$\mathbf{J}_{\text{orth}} = (\mathbf{I}'_1 \quad \mathbf{I}'_2 \quad \dots \quad \mathbf{I}'_n)^T, \quad \mathbf{I}'_i = (j'_{i1} \quad j'_{i2} \quad \dots \quad j'_{in})$$

令 $\mathbf{B} = \mathbf{J} * \mathbf{J}^T$

因为 $\mathbf{B}^T = (\mathbf{J} * \mathbf{J}^T)^T = \mathbf{J} * \mathbf{J}^T = \mathbf{B}$, 所以 \mathbf{B} 为对称矩阵, 根据对称阵的合同定理, 存在 n 阶可逆阵 \mathbf{C} : 使 $\mathbf{C}^T \mathbf{B} \mathbf{C} = \mathbf{C}^T \mathbf{J} * \mathbf{J}^T \mathbf{C} = \mathbf{I}$

同时 \mathbf{J}_{orth} 具有这样的性质: $(\mathbf{J}_{\text{orth}})^T \mathbf{J}_{\text{orth}} = \mathbf{I}$

因而可以满足 $\mathbf{J}_{\text{orth}} = \mathbf{J} \mathbf{C}$, 得到 $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{J}_{\text{orth}}^T \mathbf{J}$ 。

那么我们可以考虑取 C 为预处理矩阵, 令 $M_1 = I$, $M_2 = C^{-1}$, 得到牛拉潮流计算方程:
 $(JC)(C^{-1}\Delta x) = b$, 即 $J' = IJM_2^{-1} = J_{orth}$ (5)

3 算例及分析

本节在Matlab6.5环境下进行仿真分析, 对IEEE多节点系统进行数值实验, 迭代计算中结合Matlab在矩阵运算中的优势和特点, 先采用稀疏矩阵存储、节点编号优化和“左除”运算等特殊处理, 使牛拉法原始潮流程序得以简化, 提高了计算速度, 降低了计算内存量, 但不影响其收敛性和计算结果, 再于此基础上分别采用正交和P-Q分解预处理 J , 比较其条件数和耗费时间, 证明正交方法的有效性和适用范围。

3.1 雅可比矩阵的原始数据

首先不采用任何预处理技术, 直接计算IEEE14到300节点测试系统初次雅可比矩阵的条件数, 迭代次数(控制精度为1E-10), 以及每次迭代所需时间和总共耗费的时间, 具体数值结果如表1所示。

表1 未经预处理的测试系统的条件数和计算时间

Tab.1 Condition numbers and power flow time for test systems without preconditioning

系统(IEEE)	14	30	57	118	300
条件数	112.0	493.0	825.0	32E2	12E4
迭代次数	4	5	5	5	5
总耗时/s	1.31	3.63	7.15	17.32	23.64
初次迭代/s	0.25	0.45	0.87	1.78	4.32

注: 条件数均取矩阵的2-范数

理论上, 牛拉法具有平方收敛特性^[8], 它在开始时收敛得比较慢, 而在几次迭代以后, 收敛的非常快。由于它的这种收敛特性, 在使用稀疏矩阵技巧和优化节点编号以后, 采用平滑直电压启动(设置全网电压初值为同一数值)时, 牛拉法的迭代次数实际上与系统规模无关。一个设计良好的牛拉法潮流程序的每一次迭代时间仅与系统节点数成正比。

3.2 正交方法和P-Q分解法预处理

3.2.1 条件数和特征谱分析

表2列出了正交和P-Q分解预处理方法对各测试系统条件数的改变结果。从数值上看, 条件数都得到大幅度的降低, 正交方法的效果也是显而易见的。

从表2可以看出, 正交方法预处理雅可比矩阵, 使其条件数在一开始就降至1, 由于条件数是遵循随着系统迭代次数的增加而逐渐非单调地下降到1, 这

在潮流计算时就降低了计算复杂度, 若不考虑正交矩阵变换的时间, 可以有效压缩短潮流计算时间。

表2 测试系统初次雅可比矩阵预处理后的条件数

Tab.2 Condition numbers of initiate jacobian matrix with preconditioned test systems

系统(IEEE)	14	30	57	118	300
P-Q分解法	1.590	3.460	7.180	2.680	26.10
正交法	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

这里我们还需要注意的是上述给出的条件数是对初次迭代矩阵的分析所得, 但同理可得到, 经过正交化方法和P-Q分解法处理后的 J 任意次迭代矩阵相对于未处理的矩阵, 计算量和精度的表现都较好, 所以这里仅列举初次雅可比预处理的情况。

图1和图2为IEEE节点系统初次迭代雅可比矩阵经过预处理方法后的特征谱与原始谱(未经预处理的谱)。不论小节点系统(30)还是几百节点的大系统(300), 正交法和P-Q分解法都不同程度地改善其原始谱(特征值分布)的性质, 但是经过正交方法处理的雅可比矩阵的特征值分布不如P-Q分解法集中。

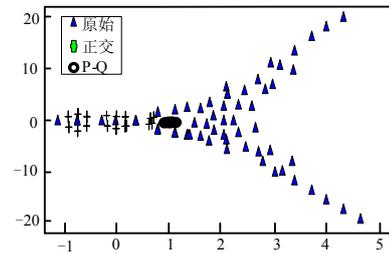


图1 IEEE30节点系统特征谱图
Fig.1 Spectrum of IEEE 30-bus

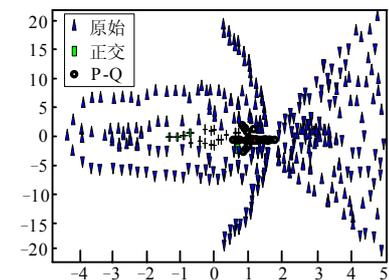


图2 IEEE300节点系统特征谱图
Fig.2 Spectrum of IEEE 300-bus

不管是正交法还是P-Q分解法, 其主要目的都是要降低 J 的条件数或改善其特征值分布情况。对CG迭代法而言, 主要取决于条件数的大小; 对GMRES类方法而言, 主要是使处理后的系数矩阵的特征值分布在复平面内尽可能小的区域内。所以在CG法中, 正交方法较P-Q法有效, 而GMRES中则反

之。

3.2.2 潮流迭代次数分析

表3为预处理后的测试系统的迭代次数,每次迭代,都分别使用P-Q分解和正交法进行预处理,控制精度为1E-10。

表3 预处理后测试系统的迭代次数

系统(IEEE)	14	30	57	118	300
P-Q分解法	3	3	4	4	4
正交法	2	2	2	2	2

可见,正交方法处理后牛拉法外部迭代次数明显减少,即提高了收敛速度。

3.2.3 潮流计算时间分析

同时也需要关注正交方法执行过程中耗去的时间,相对P-Q分解法,是否具备有一定的可比性。从表4列出的正交法和P-Q分解法处理的测试系统潮流计算总耗时间来看,正交方法,相比P-Q分解法,处理过程中没有占用太多的时间。

表4 预处理测试系统的潮流计算时间

系统(IEEE)	14	30	57	118	300
P-Q分解法 t_1	0.08	1.13	1.85	3.26	18.7
正交法 t_2	0.04	0.61	1.36	3.03	17.2
$t_1 - t_2$	0.04	0.52	0.49	0.23	0.15

但从表4也可以发现随着系统的增大,正交变换的时间也随之增加,而且与P-Q分解法的时间差距也在逐渐缩小,那么我们可以预测在更大的系统,如区域互联和重载系统(上千个节点系统)中,这样的正交方法可能无法发挥正常。不过在几百个节点的系统,该方法还是比较有优势的。

4 结论和推测

本文对牛拉法求解潮流方程当中,雅可比矩阵的预处理问题进行了详细的讨论,并提出用正交方法对其进行预处理。数值结果表明,这种算法比其他预处理方法,如目前承认的较有效的P-Q分解法,具有较少的迭代运算次数,特别是在几百个节点和要求潮流计算速度的系统中,这种算法能够有效地降低雅可比矩阵的条件数,从而快速地减少迭代次数和总体计算时间。

但是从测试系统的数值趋势分析,正交方法的优势会逐渐淹没在超大规模系统,因为要牺牲一定的时间和内存用于矩阵正交变换。并且正交方法的优势主要体现在对条件数要求更高的CG法当中,而在GMRES方法中,以具体的系统而论。

最后,关于正交方法,我们还期待简化矩阵正交变换过程或者选择近似正交方法来减少预处理矩阵计算时间,前者需要摸索施密特之外的优化方式,后者则要考虑近似程度的控制问题,类似不完全LU分解法的填充量的选择问题。

参考文献

- [1] 刘洋,周家启,谢开贵,等. 预条件处理CG法大规模电力系统潮流计算[J]. 中国电机工程学报,2006, 26(7): 89-94.
LIU Yang, ZHOU Jia-qi, XIE Kai-gui, et al. The Preconditioned CG Method for Large Scale Power Flow Solution[J]. Proceedings of the CSEE, 2006, 26(7): 89-94.
- [2] 胡博,周家启,刘洋,等. 基于预条件处理GMRES的不精确牛顿法潮流计算[J]. 电工技术学报,2007, 22(2): 98-104.
HU Bo, ZHOU Jia-qi, LIU Yang, et al. Inexact Newton Flow Computation Based on Preconditioned GMRES Method [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2007, 22(2): 98-104.
- [3] Alves A B, Asada E B, Monticelli A. Critical Evaluation of Direct and Iterative Methods for Solving $ax=b$ Systems in Power Flow Calculations and Contingency Analysis[J]. IEEE Trans on Power Systems, 1999, 14(2): 702-708.
- [4] 蔡大用,陈玉荣. 用不完全LU分解预处理的不精确潮流计算方法[J]. 电力系统自动化, 2002, 26(8): 11-14.
CAI Da-yong, CHEN Yu-rong. Solving Power Flow Equations with Inexact Newton Methods Preconditioned by Incomplete LU Factorization with Partially Fill-in [J]. Automation of Electric Power Systems, 2002, 26(8): 11-14.
- [5] Chan S H, Phoon K K, Lee F H. A Modified Jacobi Preconditioner for Solving Ill Conditioned Biot's Consolidation Equations Using Symmetricquasi-minimal Residual Method[J]. Int J Number Anal Meth Geomech, 2001, 25: 1001-1025.
- [6] 李晓华,厉吉文,张林鑫,等. 潮流计算雅可比矩阵预处理方法的比较研究[J]. 继电器, 2005, 33(15): 33-36.
LI Xiao-hua, LI Ji-wen, ZHANG Lin-xin, et al. Comparison and Study of Preconditioning Methods of Jacobian Matrix of Power Flow Calculation [J]. Relay, 2005, 33(15): 33-36.
- [7] 周硕,郭丽杰,吴柏生. Jacobi迭代预处理中的条件数与迭代次数的关系[J]. 东北电力学院学报, 2003, 23(6): 57-60.

(下转第42页 continued on page 42)

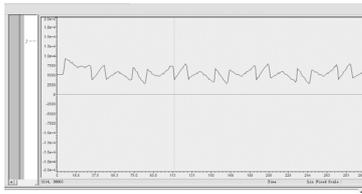
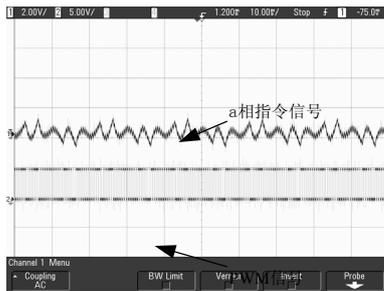
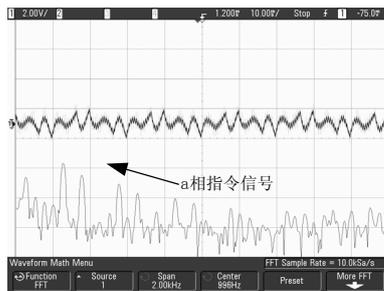


图8 a相谐波指令信号

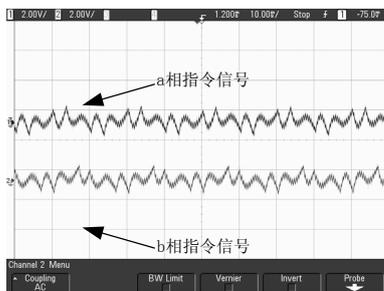
Fig.8 Harmonic reference signal of phase-a



(a) a相谐波指令信号及PWM信号



(b) a相谐波指令信号及FFT频谱



(c) a相、b相谐波指令信号

图9 实验波形

Fig.9 Experimental waveform

4 结论

与传统数字低通滤波器相比，移动窗积分法的计算量较少，当采样点较多时，仍可保持较高的采样精度和采样速度。当负载突变时，移动窗积分法可在小于1个工频周期的时间内快速跟踪负载电流的变化，改善了传统的谐波电流检测法的暂态性能。同时消除了传统数字低通滤波器由于极点而引起振荡、发散等情况。通过实验验证，结果表明本文所提出的移动窗数据积分法谐波电流实时检测方法具有计算量小、检测精度高、实时性好等优点。

参考文献

[1] 王兆安, 杨君. 谐波抑制和无功功率补偿[M]. 北京: 机械工业出版社, 1998. 209-218.
WANG Zhao-an, YANG Jun. Harmonics Suppression and Reactive Power Compensation[M]. Beijing: China Machine Press, 1998. 209-218.

[2] Akagi H, Kanazawa Y. Instantaneous Reactive Power Compensators Comprising Switching Devices without Energy Storage Components[J]. IEEE Trans Ind Appl, 1984, 20(3): 625-630.

[3] Peng F Z, Akagi H. Compensation Characteristics of the Combined System of Shunt Passive and Series Active Filters[J]. IEEE Trans Ind A, 1993, 29(1): 144-151.

[4] Pan Ching-Tsai, Chang Ting-Yu. An Improved Hysteresis Current Controller for Reducing Switching Frequency[J]. IEEE Trans on Power Elect, 1994, 9(1): 97-105.

收稿日期: 2009-03-04; 修回日期: 2009-03-23

作者简介:

靳希 (1947-), 男, 教授, 主要从事电力系统稳定与控制, 数字信号处理; E-mail:jinxiche@126.com

董立骏 (1983-), 男, 硕士研究生, 主要从事电力电子技术方面的研究。

Hangzhou: Zhejiang University Press, 1993.

收稿日期: 2009-03-03; 修回日期: 2009-05-31

作者简介:

卓芳 (1985-), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为电力系统及其自动化; E-mail: tableno1@126.com

高仕斌 (1963-), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事牵引供电系统继电保护和故障测距方面的科研和教学工作。

(上接第 23 页 continued from page 23)

ZHOU Shuo, GUO Li-jie, WU Bo-sheng. Relation Between Condition Number and Iteration Degrees in Jacobi Iteration Pretreatment[J]. Journal of Northeast China Institute of Electric Power Engineering, 2003, 23(6): 57-60.

[8] 韩祯祥. 电力系统分析[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1993

HAN Zhen-xiang. Power System Analysis[M].