

广义 Tellegen 定理在保留非线性电流注入型潮流计算中的应用

安娜, 鲁宝春, 李宝国, 陈明

(辽宁工业大学电气工程学院, 辽宁 锦州 121001)

摘要: 广义 Tellegen 定理只与物理系统所建立的数学模型有关, 与该物理系统属性无关, 因而广泛地应用于电力系统中。其小扰动定理为电力系统潮流计算提供了可能。保留非线性电流注入型的潮流计算就是将节点注入电流方程 Taylor 级数展开, 并保留到二阶项, 得到含有非线性项的修正方程式。在此基础上, 利用广义 Tellegen 定理的小扰动定理, 给出新的修正方程式, 从而简化了解题过程。仿真结果表明, 在保持计算精度和收敛性不变的情况下, 提高了潮流计算速度, 同时拓宽了广义 Tellegen 定理的应用领域。

关键词: 广义 Tellegen 定理; 小扰动定理; 潮流计算; 电流注入型; 保留非线性

Application of general Tellegen's theorem in retaining-nonlinearity power flow calculation based on current-influx model

AN Na, LU Bao-chun, LI Bao-guo, CHEN Ming

(Electric Engineering College, Liaoning University of Technology, Jinzhou 121001, China)

Abstract: General Tellegen's theorem bears a relation to the mathematical models in the physics system, however, is out of relation to any attributes in the physics system. It has been applied widely in power system. The perturbation method makes it possible to calculate in power flow calculation. The second-order Taylor series expansion is used to get a modifying equation in the current-influx model retaining-nonlinearity power flow calculation. The perturbation method of the general Tellegen's theorem is applied to this power flow calculation. New modifying equation is obtained. The method predigests the solving process, and in the case of keeping no changes on the computational accuracy and astringency, improves power flow algorithm speed and widens the field which general Tellegen's theorem can be used.

Key words: general Tellegen's theorem; perturbation method; power flow calculation; current-influx model; retaining-nonlinearity

中图分类号: TM711 文献标识码: A 文章编号: 1674-3415(2009)17-0040-04

0 引言

在电力系统分析中, 潮流计算是一个最基本的组成部分。由于其地位和作用的特殊性, 对潮流计算的方法有很高的要求: 可靠收敛, 计算速度快, 使用方法灵活, 内存占用少。如何尽可能地满足上述要求, 已经成为电力系统潮流计算领域的一个重要目标。

文献[1,2]利用潮流计算具有网络本身线性化、节点注入非线性的特点, 提出一种电流注入型潮流算法, 在每次迭代形成雅可比矩阵时, 对于PQ节点只需修正对角线上的元素, 其它元素和导纳矩阵

中对应元素相同。文献[3]采用变雅可比矩阵保留非线性法, 在第一次求取初值时不采用常规的牛顿法, 而用PQ分解法, 得到迭代的初值。该算法针对保留非线性法对初值的敏感性问题而提出的, 比传统保留非线性潮流算法更接近精确值。

广义 Tellegen 定理只与物理系统所建立的数学模型有关, 与该物理系统属性无关, 因而广泛地应用在电力系统中^[4]。文献[5]在电流注入型模型的基础上将广义 Tellegen 定理应用于潮流计算, 在收敛性和计算速度上都得到了提高。广义 Tellegen 定理适合于任意形如 $A(x)x = B(x)$ 的物理系统, 之所以采用 Tellegen, 是因为该定理本身为计算电力系统潮流提供了可能性, 即利用 Tellegen 定理的差形式, 作为求解电力系统潮流的修正方程。

本文将广义 Tellegen 定理应用于保留非线性电

基金项目: 辽宁省教育厅资助项目(2007T081); 辽宁省重点实验室资助项目(200521315)

流注入型的潮流算法。将节点注入电流方程 Taylor 级数展开时保留到二阶项, 得到新的修正方程 $\Delta \mathbf{i} + \mathbf{t} = (\mathbf{Y} + \mathbf{D})\Delta \mathbf{v}$, 利用小扰动定理对其进行修正, 进一步提高了潮流的计算速度。

1 广义 Tellegen 定理的小扰动定理

若 $n \times n$ 阶非线性矩阵 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 和 $\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{x}})$ 满足式

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (1)$$

则称 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 和 $\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{x}})$ 结构互易^[4]。若方程组 $\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{B}(\mathbf{x})$ 具有小扰动 $\delta \mathbf{A}(\mathbf{x})$ 和 $\delta \mathbf{B}(\mathbf{x})$, 则解的变化 $\delta \mathbf{x}$ 满足

$$\tilde{\mathbf{B}}^T(\tilde{\mathbf{x}})\delta \mathbf{x} = -\tilde{\mathbf{x}}^T \delta \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{x}}^T \delta \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

设已求得方程组 $\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{B}(\mathbf{x})$ 的解为 \mathbf{x}_0 , 考察 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ 的变化对解的影响。取 $\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}^T(\mathbf{x}_0)$, $\tilde{\mathbf{b}}^T(i) = [0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 0]$ 。式中 $\tilde{\mathbf{b}}(i)$ 表示 $\tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{x}})$ 中第 i 个元素为 1、其它元素为 0 的向量。

在 $\mathbf{A}(\mathbf{x}_0)$ 非奇异的情况下, 求解伴随方程 $\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{x}})\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}^T(i)$ 得 $\tilde{\mathbf{x}}$, 记做 $\tilde{\mathbf{x}}(i)$ 。这样由小扰动定理可得

$$\delta \mathbf{x}_i = -\tilde{\mathbf{x}}^T(i)\delta \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}_0 + \tilde{\mathbf{x}}^T(i)\delta \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (3)$$

整个过程的计算量是 \mathbf{x}_0 及 $\tilde{\mathbf{x}}(i)$ 。若 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ 是非线性的, 则需采用数值迭代法求 \mathbf{x}_0 , 而 $\tilde{\mathbf{x}}(i)$ 的计算只需要解一次线性方程组。

2 保留非线性电流注入模型

假设网络节点数为 n , 第 n 节点为平衡节点。节点 $1 \sim m$ 为 PQ 节点, 个数为 m ; 节点 $m+1 \sim n-1$ 为 PV 节点, 个数为 $n-m-1$ 。

对于 PQ 节点, 节点 i ($i=1, 2, \dots, m$) 的注入电流^[6]

$$\Delta \mathbf{i}_i(\mathbf{v}, P_i, Q_i) = \sum_{j=1}^n Y_{ij} \mathbf{v}_j - \frac{P_i - jQ_i}{\hat{\mathbf{v}}_i} = 0 \quad (4)$$

在直角坐标下, 写成实数形式

$$\begin{bmatrix} \Delta i_{xi} \\ \Delta i_{yi} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} G_{ij} & -B_{ij} \\ B_{ij} & G_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_j \\ f_j \end{bmatrix} - \frac{1}{e_i^2 + f_i^2} \begin{bmatrix} e_i & f_i \\ f_i & -e_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i \\ Q_i \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中: Δi_{xi} 、 Δi_{yi} 为节点注入电流变化量的实部和虚

部; $\mathbf{v}_i = e_i + jf_i$ 为网络节点电压向量; P_i 、 Q_i 为节点 i 的有功和无功注入功率; Y_{ij} 为节点导纳矩阵元素。

将式(4)在 (\mathbf{v}, P_i, Q_i) 处 Taylor 级数展开, 保留一阶项和二阶项, 得

$$\Delta \mathbf{i}_i(\mathbf{v}, P_i, Q_i) = \sum_{j=1}^n Y_{ij} \Delta \mathbf{v}_j + \frac{P_i - jQ_i}{\hat{\mathbf{v}}_i^2} \Delta \hat{\mathbf{v}}_i - \frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{v}}_i^2 \frac{P_i - jQ_i}{\hat{\mathbf{v}}_i^3} \quad (6)$$

整理得到在直角坐标系下 PQ 节点的修正方程式

$$\Delta \mathbf{i} + \mathbf{t} = (\mathbf{Y} + \mathbf{D})\Delta \mathbf{v} \quad (7)$$

式中: $\Delta \mathbf{i}$, \mathbf{t} 和 $\Delta \mathbf{v}$ 都是二维列向量; \mathbf{Y} 和 \mathbf{D} 是 2×2 阶方阵。 $\Delta \mathbf{i}$ 计算见式(5), $\Delta \mathbf{v} = \Delta e + j\Delta f$, $\mathbf{Y} = \mathbf{G} + j\mathbf{B}$, $\mathbf{D} = \text{Diag}\{\mathbf{D}_{11}, \mathbf{D}_{22}, \dots, \mathbf{D}_{(n-1)(n-1)}\}$ 是对角块阵, 第 i 个对角块元素的取值为

$$\mathbf{D}_{ii} = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中

$$\begin{cases} a_i = \frac{-Q_i(e_i^2 - f_i^2) + 2e_i f_i P_i}{(e_i^2 + f_i^2)^2} \\ b_i = \frac{P_i(e_i^2 - f_i^2) + 2e_i f_i Q_i}{(e_i^2 + f_i^2)^2} \end{cases} \quad (9)$$

\mathbf{t} 为含 $\Delta \mathbf{v}$ 的二阶项, 计算如式(10):

$$\begin{bmatrix} t_{xi} \\ t_{yi} \end{bmatrix} = -\frac{4}{(e_i^2 + f_i^2)^3} \begin{bmatrix} e_i & f_i \\ f_i & -e_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_i & f_i \\ -f_i & e_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i & -Q_i \\ Q_i & P_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_i \Delta e_i^2 + f_i \Delta e_i \Delta f_i \\ f_i \Delta f_i^2 + e_i \Delta e_i \Delta f_i \end{bmatrix} - \frac{2}{(e_i^2 + f_i^2)^2} \begin{bmatrix} P_i e_i + f_i Q_i & P_i e_i + f_i Q_i \\ P_i f_i + e_i Q_i & P_i f_i - e_i Q_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e_i^2 \\ \Delta f_i^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$\mathbf{Y} + \mathbf{D}$ 写成矩阵形式^[7]如式(11):

$$\begin{bmatrix} B'_{11} & G'_{11} & -B_{12} & G_{12} & \cdots & \cdots & -B_{1,n-1} & G_{1,n-1} \\ G'_{11} & B'_{11} & G_{12} & B_{12} & \cdots & \cdots & G_{1,n-1} & B_{1,n-1} \\ -B_{21} & G_{21} & B'_{22} & G'_{22} & \cdots & \cdots & -B_{2,n-1} & G_{2,n-1} \\ G_{21} & B_{21} & G'_{22} & B'_{22} & \cdots & \cdots & G_{2,n-1} & B_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ -B_{n-1,1} & G_{n-1,1} & -B_{n-1,2} & G_{n-1,2} & \cdots & \cdots & B'_{n-1,n-1} & G'_{n-1,n-1} \\ G_{n-1,1} & B_{n-1,1} & G_{n-1,2} & B_{n-1,2} & \cdots & \cdots & G'_{n-1,n-1} & B'_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中:

$$B'_{ii} = -\frac{\partial \Delta I_{xi}}{\partial f_i} = -B_{ii} + a_i \quad (12)$$

$$G'_{ii} = -\frac{\partial \Delta I_{xi}}{\partial e_i} = G_{ii} + b_i \quad (13)$$

$$G''_{ii} = -\frac{\partial \Delta I_{yi}}{\partial f_i} = G_{ii} - b_i \quad (14)$$

$$B''_{ii} = -\frac{\partial \Delta I_{yi}}{\partial e_i} = B_{ii} + a_i \quad (15)$$

a_i 、 b_i 的求解见式(9)。

对于 PV 节点, 采用注入有功功率和节点电压平方的不平衡量形成两个等式, 并且通过分块矩阵的概念, 将 Jacobi 矩阵分割为 2 阶子块, 使得 Jacobi 矩阵和节点导纳矩阵具有相同的结构。

PV 节点 ($i = m+1, m+2, \dots, n-1$) 的修正方程式为 $\Delta \mathbf{w} = \mathbf{J} \Delta \mathbf{v}$, 式中 $\Delta \mathbf{w}$ 和 $\Delta \mathbf{v}$ 都是二维列向量; \mathbf{J} 是 2×2 阶方阵。即

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta V^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & N \\ R & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e \\ \Delta f \end{bmatrix} \quad (16)$$

其中各个元素的表达式如下

$$\Delta P_i = P_{is} - P_i = P_{is} - e_i \sum_{j=1}^n (G_{ij} e_j - B_{ij} f_j) - f_i \sum_{j=1}^n (G_{ij} f_j + B_{ij} e_j) \quad (17)$$

$$\Delta V_i^2 = V_{is}^2 - V_i^2 = V_{is}^2 - (e_i^2 + f_i^2) \quad (18)$$

$$\begin{cases} H_{ii} = \frac{\partial \Delta P_i}{\partial e_i} = -a_i - (G_{ii} e_i + B_{ii} f_i) \\ H_{ij} = \frac{\partial \Delta P_i}{\partial e_j} = -(G_{ij} e_i + B_{ij} f_i) \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} N_{ii} = \frac{\partial \Delta P_i}{\partial f_i} = -b_i + (B_{ii} e_i - G_{ii} f_i) \\ N_{ij} = \frac{\partial \Delta P_i}{\partial f_j} = B_{ij} e_i - G_{ij} f_i \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} R_{ii} = \frac{\partial \Delta V_i^2}{\partial e_i} = -2e_i \\ R_{ij} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} S_{ii} = \frac{\partial \Delta V_i^2}{\partial f_i} = -2f_i \\ S_{ij} = 0 \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} a_i = \sum_{j \in i} (G_{ij} e_j - B_{ij} f_j) \\ b_i = \sum_{j \in i} (G_{ij} f_j + B_{ij} e_j) \end{cases} \quad (23)$$

3 应用广义 Tellegen 定理的潮流修正方程

针对保留非线性电流注入模型, 见式(7), 基于 Tellegen 定理, 设 $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{Y} + \mathbf{D}$ 相当于 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, $\Delta \mathbf{v}$ 相当于 \mathbf{x} , 设 $\Delta \mathbf{i}' = \Delta \mathbf{i} + \mathbf{t}$ 相当于 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ 。令

$$\tilde{\mathbf{J}}(\tilde{\mathbf{v}}) = \mathbf{J}^T(\mathbf{v}_0) \quad (24)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}^T(i) = [0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 0]$$

则根据小扰动定理有

$$\delta \mathbf{v}_i = -\tilde{\mathbf{v}}^T(i) \delta \mathbf{J}(\mathbf{v}) \Delta \mathbf{v}_0 + \tilde{\mathbf{v}}^T(i) \delta \Delta \mathbf{i}'(\mathbf{v}) \quad (25)$$

其中, $\tilde{\mathbf{v}}(i)$ 通过求解伴随方程

$$\tilde{\mathbf{J}}(\tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{b}}^T(i) \quad (26)$$

得到, $\Delta \mathbf{v}_0$ 由式(27)求出

$$\Delta \mathbf{i}' = \mathbf{J}(\mathbf{v}_0) \Delta \mathbf{v}_0 \quad (27)$$

在式(25)中, $\delta \Delta \mathbf{i}'(\mathbf{v})$ 是每次迭代时注入电流与第一次注入电流的差值, 即注入电流的变化量。

$\delta \mathbf{J}(\mathbf{v})$ 是每次迭代的雅可比矩阵与 \mathbf{v}_0 对应系统的雅可比矩阵之差, 即雅可比矩阵的变化量。由式(26)可以看出, 在电力系统潮流计算过程中, 只需要对 $\tilde{\mathbf{J}}(\tilde{\mathbf{v}})$, 即 $\mathbf{J}^T(\mathbf{v}_0)$ 进行一次因子表计算就可以得到 $\tilde{\mathbf{v}}(i)$ 。其中, \mathbf{v}_0 是开始计算时给定的电压初值。在以后的迭代过程中, 只需求解 $\delta \Delta \mathbf{i}'(\mathbf{v})$ 和 $\delta \mathbf{J}(\mathbf{v})$ 即可。对于 PQ 节点, 在每次迭代过程中, 只需要计算对角线上的元素, 而不用重新进行因式分解。

4 应用广义 Tellegen 定理的潮流计算步骤

(1) 给定各节点电压初值 $e^{(0)}$ 、 $f^{(0)}$;

(2) 将电压初值代入节点功率方程式中求出 $\Delta \mathbf{i}^{(0)}$ 、 $\Delta P^{(0)}$ 和 $(\Delta V^2)^{(0)}$;

(3) 将初值代入式(12)~(15)、(19)~(22)中, 分别计算出 PQ、PV 节点修正方程的系数矩阵;

(4) 解修正方程式(27)、(16), 求出电压的修正量 $\Delta e^{(0)}$ 、 $\Delta f^{(0)}$;

(5) 利用 $e^{(1)} = e^{(0)} - \Delta e^{(0)}$, $f^{(1)} = f^{(0)} - \Delta f^{(0)}$ 对各节点的电压向量进行修正, 得到新的电压值 $e^{(k)}$, $f^{(k)}$ (k 为迭代次数);

(6) 检验是否收敛, 若收敛, 则求各支路潮流并打印输出计算结果, 否则继续;

(7) 将 $e^{(k)}$, $f^{(k)}$ 代入节点功率方程式中求出 Δi 、 ΔP 、 ΔV^2 及 t ;

(8) 将 $e^{(k)}$, $f^{(k)}$ 代入式 (12)~(15)、(19)~(22) 求 PQ、PV 节点的系数矩阵;

(9) 解修正方程式 (25)、(16), 求出电压的修正量;

(10) 对各节点的电压向量进行修正, 并检验是否收敛。若收敛, 则求各支路潮流并打印输出计算结果。否则转步骤 (7) 进行循环迭代, 直到满足收敛

条件 $|\Delta i_i^{(k)}, \Delta P_i^{(k)}, (\Delta V_i^{(k)})^2| < \varepsilon$ 为止。

5 算例分析

本文用保留非线性电流注入型算法与广义 Tellegen 法做比较, 所得出的结果如表 1 所示(本文采用 Matlab 编程, $\varepsilon=0.000\ 01$)。

表 1 潮流计算结果

Tab.1 Results of power flow calculation

系统节点数	保留非线性法		广义 Tellegen 法	
	迭代时间 /s	迭代次数 /次	迭代时间 /s	迭代次数 /次
11	0.006	4	0.005	4
30	0.027	5	0.023	5
107	0.576	8	0.484	7

从表 1 可以看出, 加入广义 Tellegen 定理之后的潮流计算与保留非线性电流注入型潮流计算在相同的收敛精度下, 前者计算速度有所提高。IEEE107 节点系统的迭代次数减少了一次, 收敛速度提高了 16%。

6 结论

本文将广义 Tellegen 定理应用于保留非线性电流注入型的潮流算法。将节点注入电流方程 Taylor 级数展开时保留到二阶项, 得到新的修正方程 $\Delta i + t = (Y + D)\Delta v$, 利用小扰动定理对其进行修正。对于 PQ 节点, 在每次迭代过程中, 只需求解 $\delta \Delta i'(v)$ 和 $\delta J(v)$, 而不用重新进行因式分解, 因而减少了每次迭代的计算量, 进一步提高了潮流的计算速度。

参考文献

[1] Vander Menengoy da Costa, Martins N, Jose Luiz R Pereira. Developments in the Newton Raphson Power Flow Formulation Based on Current Injections[J]. IEEE

Trans on Power Systems, 1999, 14(4): 1320-1326.

- [2] 牛辉, 郭志忠. 电流注入模型的电力系统潮流计算[J]. 电网技术, 1998, 22(11): 39-41.
NIU Hui, GUO Zhi-zhong. Power Flow Algorithm Based on Current-influx Model[J]. Power System Technology, 1998, 22(11): 39-41.
- [3] 寇秋红, 李宝春, 鲁宝春. 一种改进的电力系统保留非线性潮流算法[J]. 辽宁工业大学学报, 2008, 28(1): 10-12.
KOU Qiu-hong, LI Bao-guo, LU Bao-chun. Improvement of Retaining-nonlinearity Load Flow Algorithm[J]. Journal of Liaoning University of Technology, 2008, 28(1): 10-12.
- [4] 鲁宝春, 刘毅, 马文阁, 等. 广义 Tellegen 定理及其在电力系统中的应用[M]. 沈阳: 东北大学出版社, 2003. 49-50.
LU Bao-chun, LIU Yi, MA Wen-ge, et al. Application of General Tellegen's Theorem in Power System[M]. Shenyang: Northeastern University Press, 2003. 49-50.
- [5] 牛辉, 郭志忠. 广义特勒根潮流计算方法[J]. 电力系统自动化, 1998, 22(10): 14-16.
NIU Hui, GUO Zhi-zhong. General Tellegen's Theorem Power Flow Calculation[J]. Automation of Electric Power Systems, 1998, 22(10): 14-16.
- [6] 王宗义, 郭志忠. 电流型牛顿法潮流[J]. 继电器, 2005, 33(18): 27-29.
WANG Zong-yi, GUO Zhi-zhong. Current-influx Model Newton Power Flow Calculation[J]. Relay, 2005, 33(18): 27-29.
- [7] 程改红, 韩肖清. 一种电流型最小化潮流算法的尝试[J]. 电力系统及其自动化学报, 2001, 13(4): 53-57.
CHENG Gai-hong, HAN Xiao-qing. A Current Injections Based Load-flow Method with Minimization Technique[J]. Proceedings of the EPSA, 2001, 13(4): 53-57.

收稿日期: 2008-09-26; 修回日期: 2009-01-06

作者简介:

安娜 (1983-), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为电力系统稳定分析与控制; E-mail: annaperfect@sina.com

鲁宝春 (1964-), 男, 博士后, 教授, 硕士研究生导师, 主要研究方向为电力系统电压稳定与控制;

李宝春 (1966-), 男, 教授, 硕士研究生导师, 主要研究方向为电力系统电压稳定与控制。