基于三次样条函数的加Rife—Vincent(III)窗FFT插值算法

张文强[1]，杨耀民[2]，许珉[1]

(1. 郑州大学电气工程学院，河南 郑州 450002；2. 郑州大学人事处，河南 郑州 450002)

摘要：对于插值FFT算法，窗函数类型和宽度是影响计算精度的主要原因。Rife—Vincent(III)窗计算精度高，但其频率修正系数公式和复振幅的插值修正函数过于复杂，直接计算运算量大，影响了它的应用。为了减小加Rife—Vincent(III)窗插值FFT算法的运算量，采用三次样条插值函数的有效形式计算频率修正系数和复振幅的修正系数，这些公式简单，计算量小。且在分段处连续，分段处的计算值为精确值，仿真计算结果表明，基于三次样条插值函数的加Rife—Vincent(III)窗插值FFT算法具有很高的精度。

关键词：电力系统；FFT插值算法；Rife—Vincent(III)窗；三次样条插值函数

The Rife—Vincent(III) window interpolation FFT algorithm by using cubic spline function

ZHANG Wen-qiang[1], YANG Yao-min[2], XU Min[1]

(1.College of Electric Engineering,Zhengzhou University, Zhengzhou 450002,China;
2.Ministry of Personnel, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002,China;)

Abstract: The window size and the window type are the main factors influencing the analysis precision of the interpolated FFT algorithm. The measuring precision of the Rife—Vincent(III) Window Interpolation Algorithm is high,but the correction formula for frequency and complex amplitude is too complicated , and it has large amount of computation. Therefore it has very limited application.In order to reduce the computational complexity for the Rife—Vincent(III) window interpolated Fast Fourier Transform algorithm, the effective form of cubic spline function is adopted to calculate correction factor for frequency and complex amplitude.The formula is simple and has less amount of calculation. Furthermore，it is continuous at the piecewise point where it has a precise value. The simulation and computed result shows that the Rife—Vincent(III) window interpolation algorithm by using cubic spline function has high precision.

Key words: power system; interpolation FFT algorithm; rife—vincent(III) window; cubic spline function

中图分类号：TM744　　文献标识码：A　　文章编号：1674-3415(2009)12-0036-04

0 引言

随着电力电子技术的快速发展和电力电子装置的广泛应用给电网带来了大量谐波污染。因此需要对谐波进行准确、快速测量。快速FFT算法是常用的电网信号分析方法。而FFT算法要求同步采样，即整周期采样[1,2]。电网信号频率通常会在额定频率附近波动。完全同步采样很难实现，实际上是非同步采样。因此应用普通FFT算法会给电力信号分析带来误差，尤其相位分析可能完全失效。加窗插值算法是解决这一问题的有效方法[3,4]。加窗插值FFT算法是一种异步采样方法。通过加窗减少频谱泄漏，通过插值消除栅栏效应引起的误差。算法中窗函数的选取很重要。通常要求窗函数主瓣窄，旁瓣低且跌落速度快；不过对于同一窗函数很难同时满足这几个要求，而Rife—Vincent(III)能较好满足上述要求。但Rife—Vincent(III)窗插值FFT算法计算量较大，原因是Rife—Vincent(III)窗插值FFT算法的频率修正系数与两相邻最大谱线比值的关系为一个五次多项式，计算复杂，不利于直接计算；另外，加Rife—Vincent(III)窗插值FFT算法的复振幅修正函数计算也很复杂，包含三角函数和频率修正系数的多项式，计算量也较大[5]，不便用汇编语言实现，这些缺点影响了它的应用。本文采用三次样条函数逼近频率修正系数的七次多项式和复振幅的修正函数[6]，用它的有效形式计算频率修正系数和复振幅的修正系数，计算量小，实时性好，且在分段处连续，为精确值，大大提高了加Rife—Vincent(III)窗

基金项目：河南省科技攻关项目（7210220006）

插值FFT算法的计算速度，较好地解决了计算精度高与计算速度慢的矛盾，便于它的广泛应用。

1 基于 Rife—Vincent (Ⅲ) 窗的加窗 FFT 插值算法

Rife—Vincent (Ⅲ) 窗实质上是一种 4 项系数余弦窗，余弦窗的一般表达式如下：

$$w_k(n)=\sum_{k=0}^{k}(-1)^k a_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)$$

$$n=0,1,\cdots,N-1 \tag{1}$$

式中：k 为余弦窗的项数，k=0 时，为矩形窗；k=3，即 α_0=1, α_1=1.43596, α_2=0.49754, α_3=0.06158 时为 Rife—Vincent(Ⅲ)窗。

设单频率信号：$x(t)=A_m e^{j2\pi f_r t}$，A_m 一般为复数，反映了幅值和初相角，实际频率 $f_r=(l+r)F$，它在频率 $l\times F$ 和 $(l+1)\times F$ 之间，l 为整数,其中 $F=1/(NT_s)$，T_s 为采样时间间隔，$0<r<1$。其离散形式为

$$x(n)=A_m e^{j2\pi f_r nT_s}R_N(n)=A_m e^{j2\pi(l+r)n/N}R_N(n) \tag{2}$$

离散信号加Rife—Vincent (Ⅲ) 窗，即

$$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)w[n]]=$$

$$\mathrm{DFT}\{x(n)[1-1.43596\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)+ 0.49754\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)-0.06158\cos\left(\frac{6\pi n}{N-1}\right)]\} \tag{3}$$

当$k=l$和$k=l+1$，并且考虑$N>>1$时可以得到：

$$X_B(l)=A_m\frac{\sin(r\pi)}{\pi}e^{jr\pi}\frac{0.00002r^4-1.5370r^2+36}{r(1-r^2)(4-r^2)(9-r^2)} \tag{4}$$

$$X_B(l+1)=A_m\frac{\sin(r\pi)}{\pi}e^{jr\pi}\times \frac{0.00002r^4-0.00008r^3-1.5369r^2+3.0739r+34.4630}{r(1-r^2)(4-r^2)(3-r)(4-r)} \tag{5}$$

由 $\alpha=\dfrac{|X(l)|}{|X(l+1)|}$ 化简得，

$$\alpha=-\frac{(r-4)}{(r+3)}\times \frac{(r^4-76849r^2+1800000)}{(r^4-4r^3-76843r^2+153694r+1723152)} \tag{6}$$

由于 $X(l)$ 和 $X(l+1)$ 的值可以通过传统的FFT算法获得，因此幅值比 α 就可以确定，然后通过 α 与r的关系式求出r,从而得到幅值A_m和相位 ϕ_m，即

$$A_m=X_B(l)\times \frac{\pi r(1-r^2)(4-r^2)(9-r^2)}{\sin(r\pi)(36-1.5370r^2+0.00002r^4)}e^{-jr\pi} \tag{7}$$

$$\varphi_m=\mathrm{angle}[X_B(l)]-r\pi \tag{8}$$

对于矩形窗和汉宁窗,$\alpha=\dfrac{r}{(r+1)}$和$\alpha=\dfrac{2r-1}{(r+1)}$,可以直接推出并利用解析表达式计算出 r 的值从而求出幅值和相位。但 Rife—Vincent (Ⅲ) 窗频率偏差与频谱比之间的关系很难直接求得，因此选用三次样条插值法求 r 的值。

三次样条插值函数[6]从数学上看，是一种改进的分段插值，在分段处具有连续的二阶导数，且连续点保持光滑。给定插值点(t_i, y_i)，$i=0, 1, \cdots, n$。在$[t_i, t_{i+1}]$上三次样条函数为

$$S_i(x)=\frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1}-x)^3+\frac{z_{i+1}}{6h_i}(x-t_i)^3+ \left(\frac{y_{i-1}}{h_i}-\frac{z_{i+1}h_i}{6}\right)(x-t_i)+\left(\frac{y_i}{h_i}-\frac{z_i h_i}{6}\right)(t_{i+1}-x) \tag{9}$$

式中: $h_i=t_{i+1}-t_i$。

由三次样条函数导数的连续性条件可以确定z_i。按上式计算，计算量仍较大，若用 h_i+t_i 替换 t_{i+1}，并进行整理可以得到三次样条函数的更有效的嵌套形式为

$$S_i(x)=y_i+(x-t_i)[C_i+(x-t_i)[B_i+(x-t_i)A_i]] \tag{10}$$

式中：

$$A_i=\frac{1}{6h_i}(z_{i+1}-z_i) \tag{11}$$

$$B_i=\frac{z_i}{2} \tag{12}$$

$$C_i=-\frac{h_i}{6}z_{i+1}-\frac{h_i}{3}z_i+\frac{1}{h_i}(y_{i+1}-y_i) \tag{13}$$

由于A_i、B_i 和 C_i 为常数，可以离线计算出，故按上式计算三次样条函数时，只需三次乘法，四

次加减法，计算速度较快，此有效形式用于函数逼近具有很大的优势。

利用三次样条函数的有效形式计算谐波幅值修正系数，计算公式简单，计算量小，且计算精度的提高，只需分段多一些，这并不影响计算速度。本文将插值 FFT 算法的谐波幅值修正系数曲线分为 10 段，给定 11 个等间距插值点，可以构造出计算加 Rife-vincent(III)窗插值 FFT 算法的频率修正系数的快速计算公式（对所有次谐波，公式都相同）。

加 Rife—Vincent (III) 窗插值 FFT 算法的复振幅的修正函数（频谱泄漏函数）为

$$\left|\frac{\pi r(1-r^2)(4-r^2)(9-r^2)}{\sin(r\pi)(36-1.5370r^2+0.00002r^4)}\right|$$

计算它不仅需要计算 r 的多项式，还需要计算三角函数，用汇编语言编程常采用级数（近似取若干项）来代替三角函数，此式中若将正弦函数展开为五项式，则需要 39 次乘法和 9 次加减法，计算量较大。因此，为了减小加 Rife—Vincent (III) 窗插值 FFT 算法，该系数也采用三次样条函数的有效形式来计算，比较彻底地减小了加 Rife—Vincent (III) 窗插值 FFT 算法计算量，大大提高了计算速度。

将插值 FFT 算法的复振幅修正系数曲线以频率修正系数间隔 0.1 分为 10 段，得出 11 个等间距插值点，构造出复振幅修正系数的三次样条函数的快速计算公式。但由于复振幅修正系数曲线在后半段不光滑，在此范围采用三次样条函数的有效形式来计算会造成很大的误差，因此我们在[0，0.5]范围内对复振幅的修正函数进行插值，而在[0.5，1]范围内对复振幅的修正函数的倒函数进行插值。这样，我们只需在计算幅值时适当地变换乘除关系即可。

2　仿真计算及分析

设某加有衰减非周期分量电压信号为

$$u(t)=380\cos(2\pi\times ft+10°)+10\cos(2\pi\times 3\times ft+25°)+15\cos(2\pi\times 5\times ft+100°)+20\cos(2\pi\times 7\times ft+150°)+7.6\cos(2\pi\times 9\times ft+210°)+50e^{(-t/0.02)}$$

如果以固定不变的采样频率 1 600 Hz 对电压进行采样，采样（截断）点数为 128 点，对采样数据分别用加 Rife—Vincent (III) 窗插值 FFT 算法和利用三次样条插值函数的加 Rife—Vincent (III) 窗插值 FFT 算法进行计算，计算结果见表 1、表 2。

表 1 加 Rife—Vincent (III) 窗利用三次样条函数 FFT 插值算法的幅值计算结果

Tab.1 Amplitude calculated result of Rife—Vincent(III) by using cubic spline function

频率	基波		三次谐波		五次谐波		七次谐波		九次谐波	
/Hz	幅值	误差/(%)	幅值	误差/(%)	幅值	误差/(%)	幅值	误差/(%)	幅值	误差/(%)
49	380.008 8	−0.002 3	10.000 59	−0.005 9	14.999 9	0.000 775	20.0061	−0.030 4	7.600 1	−0.001 426
49.5	380.122	−0.032 20	9.999 59	0.004 060	14.999 9	0.000 696	20.000 5	0.002 42	7.599 4	0.008 221
50	380	0	10	0	15	0	20	0	7.6	0
50.5	380.094 4	−0.024 83	9.999 40	0.005 834 5	15.000 03	−0.000 199	20.000 6	−0.003 2	7.599 1	0.011 483
51	380.026	−0.006 81	9.999 92	0.000 478	15.000 01	−0.000 076	20.005 5	−0.022 5	7.600 2	−0.002 54

表 2 加 Rife—Vincent (III) 窗利用三次样条函数 FFT 插值算法的相位计算结果

Tab.2 Phasic calculated result of Rife—Vincent(III) by using cubic spline function

频率	基波		三次谐波		五次谐波		七次谐波		九次谐波	
/Hz	相位	误差/(%)	相位	误差/(%)	相位	误差/(%)	相位	误差/(%)	相位	误差/(%)
49	9.986 3	0.137 0	24.911 3	0.354 8	99.555 7	0.444 3	149.373 5	0.417 6	209.985 29	0.007 625
49.5	10.030	−0.300	24.658 8	1.136 5	99.722 8	0.277 16	149.743 4	0.171 08	209.765 4	0.111 707
50	10	0	25	0	100	0	150	0	210	0
50.5	9.855 4	1.445 8	24.967 8	0.128 76	99.721 0	0.279 0	149.601 9	0.265 30	209.872	0.060 85
51	9.842 9	1.570 4	24.614 7	1.541 1	99.437	0.563 0	149.802 4	0.131 68	209.747 35	0.120 3

通过仿真计算结果可以看出，基于三次样条插值函数的加 Rife—Vincent (III) 窗插值 FFT 算法幅值误差小于 0.05%，具有很高的精度。同时说明此算法对于非周期分量有很好的滤波效果。

3　结论

本文采用三次样条函数逼近频率修正系数的七次多项式和复振幅的修正函数，用它的有效形式计

算频率修正系数和复振幅的修正系数，简洁明了，精度高，易于实现，计算量小，计算速度快，提高了实时性，较好地解决了加 Rife—Vincent(III) 窗插值 FFT 算法精度高与计算复杂、计算量大的矛盾，适用于电力系统谐波和间谐波的高精度测量及各种测控设备，具有较好的应用前景。

参考文献

[1] 祁才君. 数字信号处理技术的算法分析与应用[M]. 北京：机械工业出版社,2005.

[2] Grandke Tomas. Interpolation Algorithms for Discrete Fourier Transform of Weighed Signals[J]. IEEE Trans IM,1983,32(2):350-355.

[3] 赵文春,马伟明,胡安.电机测试中谐波分析的高精度FFT算法[J].中国电机工程学报，2001,21(12):83-87.
ZHAO Wen-chun, MA Wei-ming, HU An. FFT Algorithm with High Accuracy for Harmonic Analysis in the Electric Machine [J]. Proceedings of the CSEE, 2001,21(12):83-87.

[4] 张伏生,耿中行,葛耀中. 电力系统谐波分析的高精度 FFT 算法[J].中国电机工程学报, 1999,19(3):63-66.
ZHANG Fu-sheng , GENG Zhong-xing , GE Yao-zhong . FFT Algorithm with High Accuracy for Harmonic Analysis in Power System[J] . Proceedings of the CSEE, 1999,19(3):63-66.

[5] 钱昊，赵荣祥.基于插值 FFT 算法的间谐波分析[J].中国电机工程学报,2005,25(21):87-91.
QIAN Hao,ZHAO Rong-xiang. Interharmonic Analysis Based on Interpolation FFT Algorithm[J]. Proceedings of the CSEE, 2005,25(21):87-91.

[6] 孙同明，许珉，杨育霞.应用三次样条函数快速计算插值 FFT 算法[J]. 电力自动化设备，2007,27(6):60-62.
SUN Tong-ming, XU Min,YANG Yu-xia. Fast Calculation of Interpolated FFT Algorithm Using Cubic Spline Function[J]. Electric Power Automation Equipment,2007,27(6):60-62.

收稿日期：2008-07-30； 修回日期：2008-10-20

作者简介：

张文强（1975-），男，硕士研究生，研究方向为人工智能在电力系统中的应用；

许 珉（1956-），男，教授，研究方向为数字信号处理在电气工程中的应用。E-mail:xumin@zzu.edu.cn

（上接第 35 页 continued from page 35）

SHI Shi-hong , HE Ben-teng. Fault Location Algorithm for HV Transmission Lines Immune to Saturation of Current Transformers [J].Automation of Electric Power Systems,2008,32(2): 67-71.

[2] 陈铮,董新洲,罗承沐.单端工频电气量故障测距算法的鲁棒性[J].清华大学学报(自然科学版),2003,43(3):310-313.
CHEN Zheng, DONG Xin-zhou, LUO Cheng-mu. Robustness of One-terminal Fault Location Algorithms Based on Power Frequency Quality [J].Tsinghua Univ (Sci & Tech), 2003,43（3）:310-313

[3] Jiang Joe-air, Yang Jun-zhe, Lin Ying-hong. An Adaptive PMU Based Fault Detection/Location Technique for Transmission Lines Part I: Theory and Algorithms[J]. IEEE Trans on Power Delivery, 2000, 15(2):486-493.

[4] Jiang Joe-Air, Yang Jun-Zhe, Lin Ying-Hong. An Adaptive PMU Based Fault Detection/Location Technique for Transmission Lines Part II: Theory and Algorithms [J]. IEEE Trans on Power Delivery, 2000, 15(4):1136-1146.

[5] Novosel Damir, Hart D G, Udren E. Unsynchronized Two-terminal Fault Location Estimation[J]. IEEE Trans on Power Delivery,1996,11(1):130-136.

[6] Abe M, Otsuzuki N, Emura T, Takeuchi M. Development of a New Fault Location System foe Multi-terminal Single Transmission Lines[J]. IEEE Trans on Power Delivery, 1995,10(1):1516-1532.

[7] 束洪春，高峰，陈学允，等.T型线路输电系统故障测距算法研究[J].中国电机工程学报，1998，18（6）：416-420.
SHU Hong-chun, GAO Feng,CHEN Xue-yun, et al. A Study on Accurate Fault Location Algorithm of EHVT-Connection to Three Terminals[J]. Proceedings of the CSEE, 1998，18（6）：416-420.

[8] 束洪春,司大军,葛耀中,等. T型线路输电线路电弧故障测距时域方法研究[J]. 电工技术学报，2002，17（4）：99-103.
SHU Hong-chun, SI Da-jun, GE Yao-zhong, et al. A New Time-Domain Method for Locating Faults on T-Connecion to Three Terminal Transmission Line[J]. Trans of China Electrotechnical Society, 2002，17（4）：99-103.

收稿日期：2008-08-01； 修回日期：2008-10-18

作者简介：

王 波（1985-），男，硕士研究生，研究方向为基于 WAMS 的故障诊断等；E-mail: zjuwangbo@gmail.com

周昱勇（1970-），男，高工，硕士，研究方向为电网规划、电力系统应用软件。