

半周积分算法的几种改进算法

王明磊, 常湧

(武汉大学电气工程学院, 湖北 武汉 430072)

摘要: 半周积分算法的依据是一个正弦量在任意个半周期内绝对值的积分为一常数。积分值与积分起始点的初相角无关, 通常用梯形法则近似求出, 然后求得有效值。文章介绍了半周积分算法, 并提出了一些改进方法。设定输入信号为纯正弦信号, 对平均值代替瞬时值进行了深入的分析。用平均值可以准确求出瞬时值, 进而改进梯形法则, 以提高计算精确度。提出以辛卜生算法代替梯形法则, 并对辛卜生算法加以改进。

关键词: 半周积分算法; 梯形法则; 辛卜生算法; 微机保护

Some new algorithms of the half-cycle integral algorithm

WANG Ming-lei, CHANG Yong

(Electrical Engineering College, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: Half-cycle integral is based on that the integral of the absolute value of a sinusoidal quantity is a constant in any given half-cycle which is not subjected to the epoch angle of the integral starting point. Usually, it is calculated approximately via trapezoidal rule, then the virtual value. This paper presents the half-cycle integral algorithm and some modifications. Suppose the input signal is sinusoidal, it is analyzed deeply with the replacement of instantaneous value by average value. Instantaneous value can be derived accurately from the average value which renders the modification of the trapezoidal rule and the improvement of precision. Modified Simpson rule is introduced to replace trapezoidal rule.

Key words: half-cycle integral algorithm; trapezoidal rule; Simpson rule; microcomputer protection

中图分类号: TM771 文献标识码: A 文章编号: 1674-3415(2009)11-0066-04

0 引言

微机保护装置根据模数转换器提供的输入电气量的采样数据进行分析、运算和判断, 以实现各种基本保护功能的方法称为算法。按算法的目标可分为两大类。一类是根据输入电气量的若干点采样值通过一定的数学式或方程式计算出保护所反映的数值, 然后与定值进行比较。另一类是直接模仿模拟保护的实现方法, 根据动作方程来判断是否在动作区内, 而不计算出具体的阻抗值。半周积分算法是第一类算法。

半周积分算法是假定输入为正弦量的算法, 是基于提供给算法的原始数据为纯正弦量的理想采样值。实际上, 故障后的电流、电压都含有各种暂态分量, 而且数据采集系统还会引入各种误差, 所以这种算法要获得精确的结果, 必需和数字滤波器配合使用。

半周积分算法所需的数据窗长度为 10 ms, 显然较长。它本身有一定的滤除高频分量的能力, 但

不能抑制直流分量。这种方法运算量极小, 可以用非常简单的硬件实现。因此, 对于一些要求不高的电流、电压保护可以采用这种算法, 必要时可另配一个简单的差分滤波器来抑制电流中的非周期分量。传统的积分是用梯形法则近似求出的。只要采样率足够高, 用梯形法则近似积分的误差可以做到很小。也就是说, 梯形法则本身会产生误差, 采样率会影响误差的大小。本文提出了一种改进的梯形算法, 并提出用复化辛卜生公式代替复化梯形公式, 以提高积分的精确度。同时, 运算量小的优点也得以保存。

1 半周积分算法

半周积分算法的依据是一个正弦量在任意半个周期内绝对值的积分为一常数 S , 即

$$S = \int_0^T \sqrt{2} I |\sin(\omega t + \alpha)| dt =$$

$$\int_0^T \sqrt{2} I \sin \omega t dt = \frac{2\sqrt{2}}{\omega} I \quad (1)$$

积分 S 与积分起始点的初相角 α 无关, 因为画有断面线的两块面积显然是相等的, 如图 1 所示。

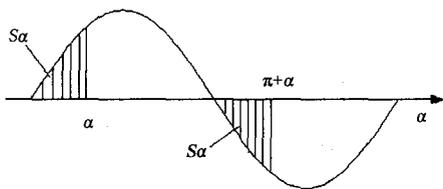


图 1 半周积分法原理示意图

Fig.1 Theory of half-cycle integral algorithm

式 (1) 的积分可以用梯形法则近似求出:

$$S \approx \left[\frac{1}{2} |i_0| + \sum_{k=1}^N |i_k| + \frac{1}{2} |i_{N/2}| \right] T_s \quad (2)$$

式中 i_k 为第 k 次采样点; N 为一周期的采样点数; i_0 为 $k=0$ 时的采样值; $i_{N/2}$ 为 $k=\frac{N}{2}$ 时的采样值; T_s 为采样间隔。

如图 2 所示只要采样率足够高, 用梯形法则近似积分的误差可以做到很小。

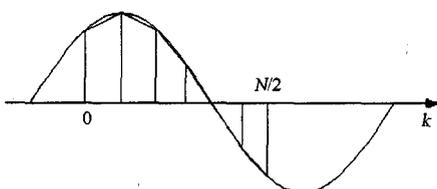


图 2 用梯形法近似半周积分示意图

Fig.2 Half-cycle integral approximately via trapezoidal rule

求出 S 值后, 应用式 (1) 即可求得有效值:

$$I = S \times \frac{\omega}{2\sqrt{2}} \quad (3)$$

半周积分法需要的数据窗长度为 10 ms, 显然较长。但它本身有一定的滤除高频分量的能力, 因为叠加在基频成份上的幅度不大的高频分量, 在半个周期积分中其对称的正负部分可以相抵消, 剩下的未被抵消的部分占得比重就减小了。但它不能抑制直流分量。另外由于这种算法运算量极小, 可以用非常简单的硬件实现。因此对于一些要求不高的电流、电压保护可以采用这种算法, 必要时可另配一个简单的差分滤波器来抑制电流中的非周期分量。

2 平均值的误差分析

用平均值代替瞬时值是一种工程上常用的数值计算方法。这种方法的误差要视具体的信号才能确定。但是, 当输入为纯正弦信号时, 用平均值可以求出准确的瞬时值。具体推导过程如下:

设信号的表达式为

$$x(t) = X_m \sin(\omega t + \alpha) \quad (4)$$

经采样后, 得到了包含 $x(n)$ 和 $x(n+1)$ 的两个采样值 (注意, 这只是两个数值), 其中 t 时刻位于 n 和 $(n+1)$ 采样时刻的中间, 如图 3 所示。

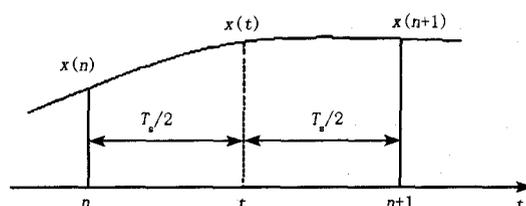


图 3 误差分析示意图

Fig.3 Error analysis

显然 $x(n)$ 和 $x(n+1)$ 只是两个数值, 但是在正弦信号情况下, 它们的表达式分别为

$$\begin{cases} x(n) = X_m \sin[\omega(t - T_s/2) + \alpha] \\ x(n+1) = X_m \sin[\omega(t + T_s/2) + \alpha] \end{cases} \quad (5)$$

于是, 由平均值求瞬时值

$$\frac{x(n) + x(n+1)}{2} =$$

$$\frac{1}{2} \{ X_m \sin[\omega(t - T_s/2) + \alpha] + X_m \sin[\omega(t + T_s/2) + \alpha] \} =$$

$$[X_m \sin(\omega t + \alpha)] \cos\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) = x(t) \cos\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) \quad (6)$$

由此可以看出, 平均值 $\frac{x(n) + x(n+1)}{2}$ 与瞬时值

$x(t)$ 二者之间, 仅相差一个系数 $\cos\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)$ 。这是一个与时刻 t 和初相角 α 无关的系数, 仅与角频率 ω 和采样间隔 T_s 有关。而对于单一的正弦符号来说, 角频率 ω 和采样间隔 T_s 又都是已知的、固定的常系数, 于是, 可以进行无误差地修正。

因此, 通过式 (6) 可知, 对于单一的纯正弦信号, 可以由平均值求出准确的瞬时值。具体计算

公式为

$$x(t) = \frac{1}{\cos(\omega T_s/2)} \cdot \frac{x(n) + x(n+1)}{2} = K_p [x(n) + x(n+1)] \quad (7)$$

式中: $K_p = \frac{1}{2\cos(\omega T_s/2)}$ 为常数。

该公式还可以用于显示、打印时的插值计算, 以便使波形更连续、平滑; 也可应用于压缩存储那些不参与计算的数据, 随后通过该公式予以恢复, 当然, 压缩存储和恢复之间仍应满足采样定理。

3 改进的半周积分算法

鉴于半周积分算法的输入为数字滤波器的输出, 而不是直接应用模数转换器提供的原始数据。半周积分算法是假定输入为正弦量的算法, 故可以通过一个系数修正平均值来精确求得瞬时值。

梯形法则中均匀插入 $N/2$ 个点 i'_k ($k=0, 1, 2, \dots, N/2-1$), 用系数修正平均值后, 得到瞬时值的精确表达式如下:

$$i'_k = \frac{1}{\cos(\omega T_s/2)} \cdot \frac{i_k + i_{(k+1)}}{2} = K_p [i_k + i_{(k+1)}] \quad (8)$$

式中: $K_p = \frac{1}{2\cos(\omega T_s/2)}$ 为常数。

于是, 梯形法则近似求积分的公式为:

$$S \approx \left[\frac{1}{2} |i_0| + \sum_{k=1}^{N/2-1} |i_k| + \sum_{k=0}^{N/2-1} |i'_k| + \frac{1}{2} |i_{N/2}| \right] \frac{T_s}{2} = \left[\frac{1}{2} |i_0| + \sum_{k=1}^{N/2-1} |i_k| + K_p \sum_{k=0}^{N/2-1} |i_k + i_{k+1}| + \frac{1}{2} |i_{N/2}| \right] \frac{T_s}{2} \quad (9)$$

式中: i'_k 为插入的值; $K_p = \frac{1}{2\cos(\omega T_s/2)}$ 。

对于单一的纯正弦信号, 该改进方法可以准确地求出插入值, 从而减小误差。对于一些接近正弦信号电流、电压信号, 该方法也能提高计算的精度。观察改进梯形算法, 其中 K_p 为常数, 故总体的运算量仍然极小。

4 复化辛卜生算法代替梯形法则

复化辛卜生算法, 即, 将积分区间 $[a, b]$ 分成 n 等份, $n=2m$ 为偶数, 步长 $h = \frac{b-a}{n}$, 分点 $x_k = a + kh$ ($k=0, 1, 2, \dots, 2m$)。在每个小区间 $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ 上用辛卜生公式, 则有

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx \approx \frac{2h}{6} [f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})] \quad (10)$$

将它们相加得

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^m \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^m \frac{h}{3} [f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})] \quad (11)$$

整理即得

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(a) + 4 \sum_{k=1}^m f(x_{2k-1}) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k}) + f(b)] \triangleq S_m \quad (12)$$

式(12)称为复化辛卜生公式。其实质就是将 $[a, b]$ 偶数等分后, 每两个小区间上采用二次插值, 也就是用分段二次插值来代替被积分函数。

用辛卜生算法代替梯形法则计算积分, 则有

$$S \approx \frac{T_s}{3} \left[|i_0| + 4 \sum_{k=1}^m |i_{2k-1}| + 2 \sum_{k=1}^{m-1} |i_{2k}| + |i_{N/2}| \right] \quad (13)$$

式中: m 为一周期的采样点数 N 的 $1/4$;

梯形法则具有 1 次代数精度, 而辛卜生算法的代数精度至少为 3 次。所以, 用辛卜生算法代替梯形法则可以明显地提高精度, 减小误差。同时, 辛卜生算法的运算量也极小, 可以用简单的硬件实现。

同理, 辛卜生算法也可以通过均匀插入 $N/2$ 个点 i'_k 加以改进。改进后的算法如下:

$$S \approx \frac{T_s}{6} \left[|i_0| + 4K_p \sum_{k=1}^m |i_{k-1} + i_k| + 2 \sum_{k=1}^{m-1} |i_k| + |i_{N/2}| \right] \quad (14)$$

5 仿真计算

当输入信号为纯正弦信号时, 用平均值可以求出准确的瞬时值。故改进的梯形算法和改进的辛卜生算法明显会比原算法更加精确。当输入信号为非

纯正弦信号时, 辛卜生算法的计算精度明显会比梯形法则的计算精度高, 因为前者的代数精度至少为 3 次, 而后者的代数精度为 1 次。

现在以正弦电流信号为例进行仿真计算, 设正弦电流信号为:

$$i(t) = 35 \sin(\omega t + \pi/3) \quad (15)$$

其中: $\omega = 2\pi f = 100\pi$, $\tau = 30$ ms。

取一周期内采样点数 N 为 40, 则采样间隔 T_s 为 0.5 ms。四种计算方法的结果如表 1 所示。

表 1 仿真计算结果

Teb.1 Simulation result

	真值	梯形算法	改进梯形算法	辛卜生算法	改进辛卜生算法
积分值 S	0.222 817	0.222 359	0.222 702	0.222 807	0.222 817
有效值 I	24.748 737	24.697 289	24.736 014	24.747 654	24.748 737
误差 / (%)	—	0.206	0.0516	0.004 88	0

由表 1 可知, 改进算法和辛卜生算法都比常用的梯形算法要精确。其中, 改进的辛卜生算法误差甚至达到零, 当然, 这里是约等于, 同时也表明此种算法的精度已经很高了。仿真结果和理论分析相吻合。

6 结论

本文提出的三种算法在仿真中得到了验证, 其运算量同梯形法则一样极小, 运算速度快。通过改

进, 半周积分算法的精确度大为提高。但是, 由于半周积分法的依据是一个正弦量在任意个半周内绝对值的积分为一常数。也就是说, 其对正弦信号才有效。另外, 改进算法所用的平均值代替瞬时值的方法, 也只有对纯正弦信号才精确。即, 改进梯形算法和改进辛卜生算法只有在输入信号为纯正弦信号时, 才精确有效。而辛卜生算法和梯形法则一样, 可以滤出正弦信号中的高频谐波, 同时, 精度大大提高。所以, 笔者认为可用辛卜生算法代替原梯形法则计算。梯形法则原有的滤除高频谐波的优点, 在本文所提的算法中仍然具有。故对于一些要求不高的电流、电压保护, 采用本文算法可以有效提高精确度。

参考文献

- [1] 杨琦逊, 黄少锋. 微型机继电保护基础(第二版)[M]. 北京: 中国电力出版社, 2005.
- [2] 朱方生, 李大美, 李素贞. 计算方法[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2003.
- [3] 李佑光, 林 东. 电力系统继电保护原理及新技术[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [4] 贺家李, 宋从矩. 电力系统继电保护原理(第三版)[M]. 北京: 中国电力出版社, 1994.

收稿日期: 2008-06-30; 修回日期: 2008-07-22

作者简介:

王明磊(1983-), 男, 硕士研究生, 从事变电站自动化及保护的研究; E-mail: wmlm@qq.com

常 湧(1959-), 男, 高级工程师, 从事变电站自动化及保护的研究。

(上接第 61 页 continued from page 61)

SUONAN Jia-le, LI Huai-qiang, SHAN Ya-zhou, et al. Reliable Power Flow Technique for Meshed Distribution Networks[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2003, 37(12): 1272-1275.

- [6] 张尧, 王琴, 宋文南, 等. 树状网的潮流算法[J]. 中国电机工程学报, 1998, 18(3): 217-220.

ZHANG Rao, WANG Qin, SONG Wen-nan, et al. A Load Flow Algorithm for Radial Distribution Power Networks[J]. Proceedings of the CSEE, 1998, 18(3): 217-220.

- [7] 邱关源. 电路[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.

收稿日期: 2008-04-25; 修回日期: 2008-09-02

作者简介:

汲亚飞(1983-), 男, 助理工程师, 研究方向为配电自动化、电力系统接地防雷技术和电磁暂态技术; E-mail: jiyafei@gmail.com

赵江河(1957-), 男, 高级工程师, 研究方向为配电自动化。