内点-分支定界法在最优机组投入中的应用

张丽华，韦 化

(广西大学电气工程学院，广西 南宁 530004)

摘要：机组投入是现代电力系统编制发电计划的重要优化任务，具有显著的经济效益。从数学上讲，机组投入问题是一个多约束的NP难组合优化问题，很难得到理论上的最优解。提出运用内点-分支定界法求解最优机组投入问题。该方法将机组投入的离散变量松弛为[0,1]区间上的连续变量，结合有功出力，进行优化。原始-对偶内点法收敛迅速、对初值不敏感，用来求解松弛问题，分支定界法用来处理离散变量。通过对2个算例的计算及与其它算法结果的比较，验证了该算法能得到更好的全局最优解。

关键词：机组投入；发电计划；原始-对偶内点法；分支定界法

中图分类号：TM71　**文献标识码**：A　**文章编号**：1003-4897(2006)18-0018-04

0 引言

机组投入问题UC(Unit Commitment)也称机组组合，是指根据负荷预测，在满足系统负荷、旋转备用容量和启停时间等约束条件下，确定一个调度周期内各时段机组的组合方式和各机组在运行时段的出力，使得在该周期内的总发电成本最小[1]。

好的机组组合方式能为发电公司节省上百万元，因此现代电力系统在编制发电计划时，机组投入问题成为其一个重要的优化任务。

从数学上讲，机组投入问题是一个高维数、离散的、非线性的组合优化问题，到现在为止，还很难找到理论上的全局最优解。但由于其显著的经济效益，一直备受关注，许多方法被用于解决该问题，如优先顺序法、拉格朗日松弛法、整数规划法、遗传算法、蚁群算法、模拟退火算法、人工智能法等[2]。

本文将UC问题中机组状态变量松弛为[0,1]上的连续变量，运用原始-对偶内点算法求解一系列的松弛问题，结合分支定界法处理机组投入的离散变量。最后对2个算例进行了仿真计算，并与其他算法得到的结果进行比较，结果表明内点-分支定界法能进行全局寻优，得到更好的最优解。

1 数学模型

1.1 目标函数

UC问题的目标函数为总的发电费用最小，通常包括发电费用和启动费用。即

$$\min F = \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}[U_{it}C_{it} + U_{it}(1 - U_{i,t-1})S_i] \qquad (1)$$

式中：N为机组总数；T为时段总数；U_{it}为机组i在第t时段的状态，值为1表示处于运行状态，值为0表示处于停机状态；C_{it}为机组i在第t时段的发电费用；S_i为机组i的启动费用。

1)发电费用

发电费用的表达式为

$$C_{it} = a_i + b_i P_{it} + c_i P_{it}^2 \qquad (2)$$

式中：a_i、b_i、c_i为机组i发电费用函数参数；P_{it}为机组i在第t时段的出力。

2)启动费用

启动费用的简化表达式为

$$S_i = \begin{cases} S_{hi}: T_{off} \le X_{off} \le T_{off} + H_{csi} \\ S_{ci}: X_{off} > T_{off} + H_{csi} \end{cases} \qquad (3)$$

式中：S_{hi}为机组i的热启动成本；S_{ci}为机组i的冷启动成本；H_{csi}为机组i的冷启动时间；X_{off}为机组i到第t时刻已连续停机的时间段。T_{off}为机组i的最小停机时间。

1.2 约束条件

UC问题必须满足一些系统约束条件以及机组自身的约束条件。本文忽略了线路网损。

1)系统功率平衡约束

$$\sum_{i=1}^{N} U_{it}P_{it} = D_t \quad (t = 1, \cdots, T) \qquad (4)$$

2)系统旋转备用约束

$$\sum_{i=1}^{N} U_{it}P_{i\max} \ge D_t + R_t \quad (t = 1, \cdots, T) \qquad (5)$$

3)最小启停时间约束

$$\begin{cases} X_{on} \ge T_{on} \\ X_{off} \ge T_{off} \end{cases} \qquad (6)$$

4)机组出力约束

$$U_{it}P_{i\min} \le P_{it} \le U_{it}P_{i\max} \qquad (7)$$

5)机组初始状态

在刚开始计算各机组起停时间时,考虑机组的初始状态。

式中:D_t为机组在第 t时段的总负荷;X_{on}为机组 i到第 t时刻已连续运行的时间段;T_{on}为机组 i的最小运行时间;P_{imax}、P_{imin}分别为机组 i的最大和最小出力,R_t为第 t时刻的系统总备用,取 D_t的 10%。

2　内点 - 分支定界法求解 UC问题

2.1　原始 - 对偶内点法

内点法是数学家 Karmarkar在 1984年提出的一种具有多项式时间特性的线性规划算法。随后,Gill将内点法进一步推广到非线性规划领域。发展到现在,原始 - 对偶内点法 (Primal - Dual Interior Point Method)已经成为了研究的主流,并且形成了成熟的现代内点理论。该法已经从理论上证明具有多项式复杂性,收敛迅速,鲁棒性强,对初值的选择不敏感。但是到目前为止,内点算法还无法准确处理离散变量问题[3]。

用原始 - 对偶内点法求解非线性规划问题的步骤如下:

一般 NLP问题的模型为:

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &\text{s.t.}\quad h(x)=0 \\ &\qquad\quad \underline{g}\le g(x)\le \overline{g} \end{aligned} \tag{8}$$

其中:$x\in R^{(n)}$, $h(x)\equiv[h_1(x),\cdots,h_m(x)]^{\mathrm T}$, $g(x)\equiv[g_1(x),\cdots,g_r(x)]^{\mathrm T}$。

首先,引入松弛变量 $(l,u)\in R^{(r)}$,将不等式约束转化为等式约束:

$$\begin{cases} g(x)-l-\underline{g}=0 \\ g(x)+u-\overline{g}=0 \end{cases}\quad (l,u)\ge 0 \tag{9}$$

定义一个拉格朗日函数:

$$L(x,l,u;z,w,\overline{z},\overline{w})\equiv f(x)-z^{\mathrm T}(g(x)-l-\underline{g})-w^{\mathrm T}(g(x)+u-\overline{g})-\overline{z}^{\mathrm T}l-\overline{w}^{\mathrm T}u \tag{10}$$

其次,推导出带扰动 KKT条件的方程,

$$\begin{aligned} &L_x\equiv\nabla f(x)-\nabla h(x)y-\nabla g(x)(z+w)=0 \\ &L_y\equiv h(x)=0 \\ &L_z=g(x)-l-\underline{g}=0 \\ &L_w=g(x)+u-\overline{g}=0 \\ &L_l^{\mu}=LZe-\mu e=0 \\ &L_u^{\mu}=UWe+\mu e=0 \\ &(l,\mu;z)\ge 0,\ w\le 0,\ y\ne 0,\ e\equiv[1,\cdots,1]^{\mathrm T}\in R^{(r)} \end{aligned} \tag{11}$$

最后,使用牛顿法即可解出式 (11)。

2.2　分支定界法

UC问题含有离散变量,因此单纯的采用原始 - 对偶内点算法并不能解决机组投入问题,需要同求解整数规划的算法结合使用。分支定界法是求解整数规划问题的一种方法,能得到问题的最优解。

分支定界法是以“松弛”、“分支”、“定界”、“剪支”为基础的。从原松弛问题的最优解出发,通过对离散变量进行逐层分支,逐步细分可行域,最终将离散变量逼近到整数解[4]。

2.2.1　分支

分支是通过引入线性松弛,将原问题的可行域反复地分割使之成为越来越小的子问题可行解域。通常采用变元二分法进行分支。例如某一离散变量 x_r的值不是整数,则构造两个新约束 $x_r\le I_r$和 $x_r\ge I_r+1$ (I_r为 x_r整数部分),分别加入到原松弛问题中形成两个新的子问题。

由于松弛的 UC问题中离散变量的值都在 [0, 1]区间上,因此在分支时,每个待分支变量 U_r都只是分解为 $0\le U_r\le 0$和 $1\le U_r\le 1$两种情况,即分别取值为 0和 1。

2.2.2　剪枝

分支定界法是一种隐枚举法,因此随着分支的进行,待分支的子问题的数目急剧增大,计算时间将急剧增加。因此,能否较早的剪枝关系算法的计算效率。一般遇到下列情况就需剪枝:问题无可行解;问题的最优解满足整数要求;子问题的最优值大于等于当前上界。

在用分支定界法处理机组状态变量时,下列情况也要剪枝。在计算待分支变量取值为 0的子问题之前,先判断如果取值为 0,是否满足最小运行时间约束和旋转备用约束。如果有一个约束不满足,则该子问题不可行,被剪枝。

如果机组 i在 $t-1$时段满足最小运行时间约束,在 t时刻可以停机,还要判断如果机组 i在第 t时刻停机,是否会导致在第 t'时刻 ($t'\in[t+1, t+T_{off}]$)系统的总发电量不满足功率平衡约束或旋转备用约束,如果是,则从第 t时刻到第 t'时刻该机组都不能停机。在分支时,如果待分支变量为机组 i对应的状态变量,则取值为 0的子问题也不可行,被剪枝。

本文按时段排列机组状态变量,从第一个时段的第一个非整数变量开始分支。按时段分支,从快到慢排列同层的待分支子问题,以尽早得到原问题

的可行解,进行剪枝,提高计算速度。在处理大规模问题时,对按时段分支慢的子问题直接进行剪枝,大大减少了计算量,节省了计算时间。

2.3 内点-分支定界法求解 UC问题的步骤

1)初始化。置 $k=0$, $K_{\max}$,读入数据。

2)松弛原问题,把机组状态变量松弛为 [0, 1] 上的连续变量,利用原始-对偶内点法求解松弛的原问题。

3)判断原松弛问题是否可行。若无可行解,则原问题不可行。若找到满足整数要求的最优解,则为原问题的最优解。若机组状态变量不是整数,则将该松弛问题加入到待分支数组 RP_中。并将原松弛问题的目标值定为原问题的下界,原问题的上界赋为任意大值 MAX。

While $k < K_{\max}$ Do

4)判断待分支数组 RP_是否为空,否,继续;反之,跳出循环,从整数可行解数组 IP_中,求得原问题的最优解,停机。

5)计算 RP_中待分支子问题的总数。设置两个数组 RP和 IP,分别存放分支后未达整数的松弛子问题和已达整数解的松弛子问题。

6)进入子循环。在分支之前,首先判断该子问题中待分支变量所在的时段是否和它对应的上层问题在同一个时间段,是,则在计算最小起停时间和启动费用时,仍取原值;否,则根据各机组在这一时段和上一时段的状态计算相应的变量,即运行时间、停机时间以及启动费用。

使用原始-对偶内点法求解子问题。对不可行子问题,将 RP、IP对应行置 0。对已得整数解的松弛子问题将 RP对应行置 0, IP对应行存储整数可行解信息。对不满足整数要求的松弛子问题加入到待分支数组 RP中,对应的 IP行置 0。跳出子循环。

7)对 RP数组进行去 0行,即对不可行和已得到整数可行解的子问题剪枝。

8)将 RP数组按时段分支快慢排列待分支子问题。

9)对 IP数组去 0行,并按目标值由小到大排列。

10)调整原问题的上下界,将此次分支的 RP中目标值最小的赋予下界;将 IP中的目标值最小的赋予上界,当 IP为空时,上界为 MAX。

11)用 RP、IP分别刷新 RP_、IP_。

$k = k + 1$;

END Do

3 算例分析

为了验证该算法的有效性,用 Matlab7.0编写了相应程序,计算机 CPU为 P4 2.8 GHz。使用该程序对 2个算例进行了分析和计算。

在用原始-对偶内点法求解一系列的松弛子问题时,机组状态变量初值都取 1,有功出力变量取其上下限的平均值。

3.1 3机 4个时段

发电机参数见表 1。机组启停时间约束为 1 h,不考虑机组启动费用。各时段负荷以及对应的最优投入计划列于表 2中。由该表可以看出,使用 IP-BBM算法得到的结果与文献[5]中的结果相同。

表 1 机组参数

Tab.1 Unit data

机组	$P_{\max}$	$P_{\min}$	a	b	c
1	600	100	500	10	0.002
2	400	100	300	8	0.002 5
3	200	50	100	6	0.005

表 2 3机 4时段的最优投入计划

Tab.2 Unit commitment schedule of 3 units for 4 hours

时段	负荷/MW	机组 1/MW	机组 2/MW	机组 3/MW
1	170	0	0	170
2	520	0	320	200
3	1 000	400	400	200
4	330	0	130	200

3.2 10机 24个时段

发电机参数和各时段的负荷见文献[5]。在计算起停时间时,考虑各机组初始状态。为 8表示该机组已连续运行了 8个小时,为 -5表示该机组已连续停运了 5个小时。设两个基本负荷机组。IP-BBM算法计算得到的机组发电费用为 559 940 $,启动费用为 4 100 $。表 3列出了使用 IP-BBM算法与其他几种方法得到的最终结果的比较。机组最优投入计划见表 4。从表 2中可以看出,使用 IP-BBM算法得到的最优解均优于由 LRGA[5]、GA[6]、EP[7]得到的最优解。

表 3 结果比较

Tab.3 Comparison of the results

方法	IP-BBM	LRGA	GA	EP
费用/$	564 040	564 800	565 825	565 352

从以上结果可以看出,由于分支定界法是一种确定性解法,能找到全局最优解。使用 IP-BBM算法求解 UC问题时,是在所有的可行解中寻找最优解,搜索的范围比较大。但因为所要计算的子问题比较多,整个计算过程花费时间比较长。

表 4　10机 24时段的最优投入计划

Tab. 4　Unit commitment schedule of 10 units for 24 hours

机组	时段																							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
5	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

4　总结

本文采用内点 - 分支定界法求解最优机组投入问题。将 UC问题中机组状态变量松弛为 [0, 1]上的连续变量,结合有功出力,并行进行优化。利用原始 - 对偶内点法收敛迅速、对初值不敏感等优点求解一系列松弛问题,使用分支定界法处理离散变量。通过 2个算例验证了该算法能进行全局寻优,并且与其它算法得到的结果进行比较,结果表明该算法能得到更好的最优解。由此可见,内点 - 分支定界法不仅可以解决最优机组投入问题,而且对解决其它组合优化问题也有一定的启发意义。

参考文献:

[1] 王喆,余鑫,张弘鹏. 社会演化算法在机组组合中的应用[J]. 中国电机工程学报, 2004, 24(4): 12-17.
WANG Zhe, YU Xin, ZHANG Hong-peng. Social Evolutionary Programming Based Unit Commitment[J]. Proceedings of the CSEE, 2004, 24(4): 12-17.

[2] Padhy N P. Unit Commitment——a Bibliographical Survey[J]. IEEE Trans on Power Systems, 2004, 19(2): 1196-1205.

[3] Wei H, Sasaki H, Kubokawa J, et al. Interior Point Nonlinear Programming for Optimal Power Flow Problems with A Novel Data Structure[J]. IEEE Power Industry Computer Applications Conference. Piscataway: 1997.

[4] 范宏,韦化. 基于扰动 KKT条件的原始 - 对偶内点法和分支定界法的最优潮流研究[J]. 电力自动化设备, 2004, 24(5): 5-9.
FAN Hong, WEI Hua. Study on Optimal Power Flow Based on Primal-dual Interior Point Algorithm Under Perturbed KKT Conditions and Branch-and-Bound Method[J]. Electric Power Automation Equipment, 2004, 24(5): 5-9.

[5] Cheng C P, Liu C W, Li C C. Unit Commitment by Lagrangian Relaxation and Genetic Algorithms[J]. IEEE Trans on Power Systems, 2000, 15(2): 707-714.

[6] Kazarlis S A, Bakirtzis A G, Petridis V A. Genetic Algorithm Solution to the Unit Commitment Problem[J]. IEEE Trans on Power Systems, 1996, 11(1): 83-92.

[7] Juste K A, Kita H, Tanaka E, et al. An Evolutionary Programming Solution to the Unit Commitment Problem[J]. IEEE Trans on Power Systems, 1999, 14(4): 1452-1459.

收稿日期: 2005-10-21

作者简介:

张丽华(1981 -),女,硕士研究生,研究方向为电力系统最优化; E-mail: pyzhanglihua@163.com

韦　化(1954 -),男,博士,教授,博士生导师,研究方向为电力系统最优运行与规划、内点算法在电力系统中的应用。

Interior point method and branch-and-bound method for unit commitment

ZHANG Li-hua, WEI Hua

(School of Electrical Engineering, Guangxi University, Nanning 530004, China)

Abstract: Unit commitment problem is an important optimization task in building generation planning of modern power systems, it has prominent economic benefit. From the view of mathematics, it is a NP hard combinational optimization problem with constraints and it is difficult to find the optimal solution in theory. This paper presents an application of Primal-Dual Interior Point Method (PDIPM) and Branch-and-Bound Method (BBM) for unit commitment problem. This method optimizes the relaxed zero-one variables and the active power continuous variables simultaneously. Interior Point Method, which convergences fast and is not sensitive to the initial point, is adopted to solve the relaxed problems, Branch-and-Bound Method is used to deal with the discrete variables. Compared with other methods, numerical results on two cases demonstrate the algorithm can get better global optimal solution.

Key words: unit commitment; generation plan; that primal-dual interior point method; branch-and-bound method