一种能滤除衰减直流分量的新递推离散傅氏算法

李 晨, 张 杭, 张爱民, 王建成
(西安交通大学, 陕西 西安 710049)

摘要: 为了减少传统全波傅里叶算法的计算量,人们总结出了递推离散傅里叶算法,但它对衰减直流分量的滤除不明显。该文提出了一种新的递推算法,该算法基于三角函数和差公式以及线性方程组的求解,并且计算量与原有递推傅里叶算法相近,理论上可以消除直流分量对各次谐波的影响。

关键词: 全波傅氏算法; 递推 DFT; 衰减直流分量; 交流采样

中图分类号: TM71; TM771 **文献标识码**: A **文章编号**: 1003-4897(2005)17-0017-04

0 引言

大多数微机保护算法的计算就是对采样信号进行频谱分析而获得其参数估算的过程,对算法性能的评价也取决于其是否能在较短的数据窗中获得精确的估计值。在各种算法中,傅里叶变换的数学体系是如此之严密完整、物理意义是这样的明确,以至于在小波变换备受推崇的今天,仍然是被广泛使用进行信号频谱分析的重要工具。目前在微机继电保护算法中,较常采用的是离散全波傅里叶变换。然而,电力系统出现故障后电流信号中往往还包含衰减直流分量,但是其对衰减直流分量的过滤效果并不理想。为此人们进行了广泛的研究,并提出很多算法。如文献[1]是最小二乘滤波算法,但该算法比较复杂,不是很适用于实际工程;而文献[5]中提出的是在全周期傅里叶算法的基础上,通过增加采样数据的方法来滤除衰减直流分量,但这样就使整个所需采样长度较大了,所以不利于微机保护的快速性的要求,就更不适用运算速度相对较低的单片机进行处理。

本文从计算量较少的递推傅里叶变换算法着手,对原有算法进行了改进,通过实部虚部误差所特有的数学关系,在两次采样后推导出递推关系,提出的新算法理论上可完全滤除衰减直流分量,而且采用的数据就是实际得到的采样数据不需要再进行特别的处理。利用本文提出的新算法递推方法计算各采样点处的误差,利用计算机运算可以求出较为精确的基波及谐波分量,具有计算量小,精度高的优点,很适合用于实时性要求较高的继电保护系统。

1 全波傅氏算法及误差分析

1.1 全波傅氏算法

全波傅氏算法可以滤除恒定的直流分量和基波整数次谐波分量。

假定被采样的信号具有如下形式:

$$x(t) = a + \sum_{k=1}^{P} X_m(k)\cos(k\omega t + \phi_k) \qquad (1)$$

式中: a为直流分量; $X_m(k)$、ϕ_k分别为 k次谐波的幅值和初相角。

根据傅氏级数原理,可以得到各次谐波分量的实部和虚部的时域表达式为:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos k\omega t\,dt \qquad (2)$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin k\omega t\,dt \qquad (3)$$

式中: T为基频分量的周期; ω为基频分量的角频率 ($\omega = 2\pi/T$)。

1.2 全波傅氏算法的误差

在上面的算法中,都是以周期信号为基础的,当输入信号中出现有衰减的直流分量时,应用全波傅氏算法必将引起误差。

设输入信号为:

$$x(t) = X_0 e^{-t/\tau} + \sum_{k=1}^{P} X_m(k)\cos(k\omega t + \phi_k) \qquad (4)$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^t x(t)\cos k\omega t\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T X_0 e^{-t/\tau}\cos n\omega t\,dt + \frac{2}{T}\int_0^T \sum_{r=1}^{P}[X_m(r)\cos(r\omega t + \phi_r)]\cos k\omega t\,dt = \delta_a + X_m(k)\cos\phi_k \qquad (5)$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^t x(t)\sin k\omega t\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T X_0 e^{-t/\tau}\sin k\omega t\,dt + \frac{2}{T}\int_0^T \sum_{r=1}^{P}[X_m(r)\cos(r\omega t + \phi_r)]\sin k\omega t\,dt = \delta_b + X_m(k)\sin\phi_k \qquad (6)$$

其中:

$$\delta_a = \frac{2}{T}\int_0^T X_0 e^{-t/\tau}\cos k\omega t dt \quad (7)$$

$$\delta_b = \frac{2}{T}\int_0^T X_0 e^{-t/\tau}\sin k\omega t dt \quad (8)$$

可以看出当输入信号中包含衰减直流分量时,$\delta_a \neq 0, \delta_b \neq 0$,全波算法所得实部虚部均有误差。这可以通过以下的数学推导,得到 δ_a 和 δ_b 之间的数学关系。

因为 $\int_0^T X_0 e^{-t/\tau}\sin k\omega t dt = -\tau \cdot X_0 \sin k\omega t \cdot e^{-t/\tau}\Big|_0^T + \tau \cdot k\omega \int_0^T X_0 e^{-t/\tau}\cos k\omega t dt = k\omega\tau \int_0^T X_0 e^{-t/\tau} \cdot \cos k\omega t dt$

故可得

$$\delta_b = k\omega\tau\delta_a \quad (9)$$

2 傅氏递归算法

2.1 传统的递归离散傅氏算法

在实际的微机交流器件中,当傅氏分析方法应用于计算机进行处理时应采用离散化的形式,即离散傅氏变换(DFT)。

设信号 $x(t)$ 每周期的采样点数为 N,则采样间隔将是 $\Delta T = T/N$,而当前采样时刻 $t_0 = m\Delta T (m \geq N)$,则第 m 次采样值为:

$$x[m] = X_0 e^{-m\Delta T/\tau} + \sum_{k=1}^{P} X_m(k)\cos(\frac{2\pi}{N}km + \phi_k) = I_{md} + I_{ma} \quad (10)$$

其中:$I_{md} = X_0 e^{-m\Delta T/\tau}$ 为衰减直流分量,$I_{ma} = \sum_{k=1}^{P} X_m(k)\cos(\frac{2\pi}{N}km + \phi_k)$ 为交流分量。

由于交流分量在一个周期内积分应为零,故有

$$\sum_{j=m+1-N}^{m} I_{ja} \cdot \Delta T = 0 \quad (11)$$

那么在一个周期中对 $x[m]$ 积分应有:

$$\sum_{j=m+1-N}^{m} x[j] \cdot \Delta T = \sum_{j=m+1-N}^{m} I_{jd} \cdot \Delta T = X_0 \Delta T \sum_{j=m+1-N}^{m} e^{-j\Delta T/\tau} \quad (12)$$

由此可得衰减直流分量的初值为:

$$X_0 = \sum_{j=m+1-N}^{m} x[j] / (\sum_{j=m+1-N}^{N} e^{-j\Delta T/\tau}) \quad (13)$$

经过一个采样间隔后有:

$$X_0 e^{-\Delta T/\tau} = \sum_{j=m+2-N}^{m+1} x[j] / (\sum_{j=m+1-N}^{N} e^{-j\Delta T/\tau}) \quad (14)$$

再由(12)与(13)相比得:

$$e^{-\Delta T/\tau} = \sum_{j=m+2-N}^{m+1} x[j] / \sum_{j=m+1-N}^{m} x[j] \quad (15)$$

那么衰减直流分量的初值和时间常数就可通过采样值得到。

而把式(2)、(3)离散化后得到的,DFT的公式可表达为:

$$a_k(m) = \frac{2}{T}\sum_{i=1}^{N} x[i+m-N]\cos[k\frac{2\pi}{N}(i+m-N)] \quad (16)$$

$$b_k(m) = \frac{2}{T}\sum_{i=1}^{N} x[i+m-N]\sin[k\frac{2\pi}{N}(i+m-N)] \quad (17)$$

式中:$x[k] = x(t)\Big|_{t=k\Delta T}$,$T = \frac{2\pi}{\omega}$。

据此还可以计算出 k 次谐波的幅值和初相角为:

$$X_k(m) = \sqrt{a_k^2(m) + b_k^2(m)} \quad (18)$$

$$\Phi_k = \arctan\frac{b_k(m)}{a_k(m)} \quad (19)$$

在不含直流分量的情况下,由式(5)、(6)可得到理想的实部和虚部:

$$X_{Re}(m) = X_k(m)\cos\Phi_k \quad (20)$$

$$X_{Im}(m) = X_k(m)\sin\Phi_k \quad (21)$$

从式(16)、(17)看出,使用 DFT 算法的信号的一个谐波分量,共需 $2N$ 次乘法和 $(2N-1)$ 次加法,这样每次进行抽样所需计算得数据量非常大,而且随着 N 的增长,计算量将显著增加。因此人们考虑了很多方法去减少必要的工作量。

针对式(16)、(17)的 DFT 我们可以采用递推算法来达到目的。根据式(16)、(17)我们可以看出,第 m 次采样与第 $m+1$ 次采样的 DFT 公式的差别只在第 m 次采样值和第 $m-N$ 次的采样值,而其他 $N-1$ 项都相同。则据递推的思路可得到以下的公式:

$$\begin{cases} a_k(m) = a_k(m-1) + \frac{2}{N}[x(m) - x(m-N)] \cdot \cos(\frac{2\pi}{N}km) \\ b_k(m) = b_k(m-1) + \frac{2}{N}[x(m) - x(m-N)] \cdot \sin(\frac{2\pi}{N}km) \end{cases} \quad (22)$$

那么,上式在计算 $m+1$ 点时只需 2 次乘法和 4 次加法,且与 N 的选取无关,所以可以极大地减少

DFT的运算量,因此可以进行广泛的应用。

2.2 克服衰减直流分量的递推算法

前面已经进行了说明,传统的递推算法对于包含衰减直流分量的信号计算将会有误差,对于在此基础之上提出的递推算法也不例外,所以为了保证此算法的精确度,必须消除 δ_a、δ_b 的影响,即必须求出 $\delta_a(m)$,$\delta_b(m)$。

首先,在前一时刻计算第 $m-1$次采样值的全波傅氏变换(此时序列从 $m-N$到 $m-1$),可得:

$$\begin{cases} a_k(m-1) = A_k(m-1) + \delta_a(m-1) \\ b_k(m-1) = B_k(m-1) + \delta_b(m-1) \end{cases} \tag{23}$$

$A_k(m-1)$, $B_k(m-1)$ 实际上就是理想的实虚部。

$$\begin{cases} A_k(m-1) = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{r=1}^{P} X_m(r)\cos\left[\frac{2\pi}{N}r(i+m-1-N)+\phi_r\right]\right)\cos\left[\frac{2\pi}{N}k(i+m-1-N)\right] \\ B_k(m-1) = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{r=1}^{P} X_m(r)\cos\left[\frac{2\pi}{N}r(i+m-1-N)+\phi_r\right]\right)\sin\left[\frac{2\pi}{N}k(i+m-1-N)\right] \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases} \delta_a(m-1) = \sum_{i=1}^{N} X_0 e^{-(i+m-1-N)\Delta t/\tau}\cdot\cos\left[\frac{2\pi}{N}k(i+m-1-N)\right] \\ \delta_b(m-1) = \sum_{i=1}^{N} X_0 e^{-(i+m-1-N)\Delta t/\tau}\cdot\sin\left[\frac{2\pi}{N}k(i+m-1-N)\right] \end{cases} \tag{25}$$

然后,再在第 m次采样时,用递推的方法求出 $a_k(m)$, $b_k(m)$。此处:

$$\begin{cases} a_k(m) = A_k(m) + \delta_a(m) \\ b_k(m) = B_k(m) + \delta_b(m) \end{cases} \tag{26}$$

其中

$$\begin{cases} A_k(m) = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{r=1}^{P} X_m(r)\cos\left[\frac{2\pi}{N}r(i+m-N)+\phi_r\right]\right)\cos\left[\frac{2\pi}{N}k(i+m-N)\right] \\ B_k(m) = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{r=1}^{P} X_m(r)\cos\left[\frac{2\pi}{N}r(i+m-N)+\phi_r\right]\right)\sin\left[\frac{2\pi}{N}k(i+m-N)\right] \end{cases} \tag{27}$$

由于对周期信号 $I(t)$而言,有 $\sum_{i=1}^{N} I(i)\cos(i) = \sum_{i=1}^{N} I(i-1)\cos(i-1)$,对于上面的公式进行应用,则

可得实际上 $A_k(m) = A_k(m-1) = A_k$, $B_k(m) = B_k(m-1) = B_k$

而对于

$$\delta_a(m) = \sum_{i=1}^{N} X_0 e^{-(i+m-N)\Delta t/\tau}\cos\left[\frac{2\pi}{N}k(i+m-N)\right] = e^{-\Delta t/\tau}\sum_{i=1}^{N} X_0 e^{-(i+m-1-N)\Delta t/\tau}\cdot\cos\left[\frac{2\pi}{N}k(i+m-1-N)+\frac{2\pi}{N}k\right]$$

展开后可得:

$$\begin{cases} \delta_a(m) = e^{-\Delta t/\tau}[k_a\delta_a(m-1) - k_b\delta_b(m-1)] \\ \delta_b(m) = e^{-\Delta t/\tau}[k_b\delta_a(m-1) + k_a\delta_b(m-1)] \end{cases}$$

$$k_a = \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right),\quad k_b = \sin\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \tag{28}$$

由式(8)、(25)及(27)消去中间变量 A_k, B_k, $e^{-\Delta t/\tau}$后可得到:

$$\begin{cases} \delta_a(m) = \{[b_k(m) - b_k(m-1)][k_a + k_bQ] + [a_k(m) - a_k(m-1)][k_b - k_aQ]\}/[k_b(1+Q^2)] \\ \delta_b(m) = Q\delta_a(m) \end{cases} \tag{29}$$

其中:$Q = k\omega\tau$, $k_a = \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$; $k_b = \sin\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$。

$$\begin{cases} A_k = a_k(m) - \delta_a(m) \\ B_k = b_k(m) - \delta_b(m) \end{cases} \tag{30}$$

$a_k(m)$、$b_k(m)$的算法见式(22)。

而且从式(30)也可看出,在计算 $m-1$点时也只需 6次乘法和 8次加法,且与 N的选取无关,而文献[4]中方法需要 10次乘法和 6次加法,文献[5]中方法需要 24次乘法和 6次加法,故本算法运算量也很小。并且在实际运算时,文献[4]和文献[5]中方法所需数据窗为 $N+2$,本方法所需数据窗为 $N+1$,与此两类常用方法相比具有更好的实时性。

3 仿真计算

设有如下的采样信号:

$$x(t) = 20e^{-t/\tau} + 20\sin(\omega t+\phi) + 4\sin 2\omega t + 10\sin 3\omega t + 2\sin 4\omega t + 6\sin 5\omega t$$

取 $\tau = 30$ ms, $\omega = 100\pi$, $\phi = 45°$。对改进的递推傅氏算法进行仿真计算,并与改进前的递推傅

氏算法进行比较,结果如表 1所示 (N = 20,递归次数为 5)。

可见,改进后的递归算法与原有的递归算法相比较具有较好的过滤直流衰减分量的能力。此算法在精度方面与其他的一些算法如文献 [2]和文献 [3]中的算法进行比较时在误差方面还稍显逊色,但是由于它主要用于微机保护等实时性要求较高的场合,因此在满足准确性要求的基础之上,计算量因素更显重要。并且理论上,本方法思路也可应用于半波傅里叶算法。

表 1 仿真计算结果

Tab. 1 Results of simulating calculation

算法	基波				二次谐波		三次谐波	
	幅值	误差/(%)	初相角/(°)	误差/(%)	幅值	误差/(%)	幅值	误差/(%)
原有递归傅氏算法	36.187	80.9	56.95	26.56	6.274	56.9	13.604	36.0
改进后的递归傅氏算法	20.899	4.5	47.35	5.2	4.275	6.9	10.047	4.7

4 结束语

本文基于三角函数的和差公式以及线性方程组的求解,提出了一种新的递推离散傅里叶变换算法。它的计算量与传统递推算法接近,并且能够克服电力系统中衰减直流分量对 DFT算法的影响。综合考虑了计算量和精度方面的要求,结合实际应用的场合及经济性的考虑,新的递推 DFT为很多计算量大的算法应用于计算能力较低的系统创造了条件,因而应具有更广泛的应用空间。

参考文献:

[1] 陈德树. 计算机继电保护原理与技术 [M]. 北京:水利电力出版社, 1992.
CHEN De-shu. Principle and Technology for Computer Relay Protection [M]. Beijing: Hydraulic and Electric Power Press, 1992.

[2] Oppenheim A V,等. 信号与系统 [M]. 刘树棠,译. 西安:西安交通大学出版社, 1985.
Oppenheim A V, et al. Signals and Systems [M]. LIU Shu-tang, Trans. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1985.

[3] 熊岗,陈陈. 一种能滤除衰减直流分量的交流采样新算法 [J]. 电力系统自动化, 1997, 21(2): 24-26.
XIONG Gang, CHEN Chen. A Novel Alternating Current Sampling Algorithm for Filtering Decaying Direct Current Component [J]. Automation of Electric Power Systems, 1997, 21(2): 24-26.

[4] 张立华,徐文立,常成,等. 一种适用于微机保护的新的递推 DFT算法 [J]. 电力系统自动化, 2000, 24(5): 28-31.
ZHANG Li-hua, XU Wen-li, CHANG Cheng, et al. New Recursive DFT for Computer Relay [J]. Automation of Electric Power Systems, 2000, 24(5): 28-31.

[5] 苏文辉,李钢. 一种能滤去衰减直流分量的改进全波傅氏算法 [J]. 电力系统自动化, 2002, 26(23): 42-44.
SU Wen-hui, LI Gang. An Improved Full-wave Fourier Algorithm for Filtering Decaying DC Component [J]. Automation of Electric Power Systems, 2002, 26(23): 42-44.

[6] Bracewel L, Ronald N. The Fourier Transform and Its Applications, 2nd Edition [M]. McGraw-hill Electrical and Electronic Engineering Series [M]. New York: McGraw-hill, 1978.

收稿日期: 2004-11-16; **修回日期**: 2005-03-14

作者简介:
李 晨 (1981 -),女,博士研究生,主要从事自动控制、计算机监控检测、蓝牙技术的应用等方向的科研和开发; E-mail: lynnlc@163.com
张 杭 (1962 -),男,副教授,硕士生导师,当前的研究领域主要涉及自动控制、计算机继电保护、电力系统在线监控等;
张爱民 (1963 -),女,副教授,硕士生导师,当前研究领域主要包括自动控制及智能检测方面。

A recursive discrete Fourier algorithm for filtering decaying DC component

LI Chen, ZHANG Hang, ZHANG Ai-min, WANG Jian-cheng
(Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: To reduce computational complexity of the conventional full-wave Fourier algorithm, the recursive discrete Fourier algorithm is deduced, but it cannot completely filter decaying direct current component. For this reason, this paper presents a novel recursive algorithm. The novel algorithm is based on sum-and-difference formula of trigonometrical function and solution of linear equations, and its computational work is nearly same as that of traditional recursive algorithm. What's more, it can eliminate the influence of the decaying direct current component on any harmonic component theoretically.

Key words: full-wave Fourier algorithm; recursive DFT; decaying direct current component; AC sampling