

基于分块雅可比矩阵的最小二乘状态估计算法

王珍意, 周良松

(华中科技大学电气与电子工程学院, 湖北 武汉 430074)

摘要: 提出了一种基于分块雅可比矩阵的加权最小二乘状态估计算法。该方法将全部的注入功率量测、赋予很大权值的虚拟量测和必要的支路量测来构造一组恰好可求解系统全部状态变量的量测集, 将余下的支路功率量测作为量测系统的冗余部分看待, 并依此对量测雅可比矩阵进行分块, 在此基础上推导出了该文算法迭代的修正方程式。该文所提算法既具有很好的数值稳定性, 又能够减少计算量。仿真试验表明该方法是快速且数值稳定。

关键词: 电力系统; 状态估计; 数值稳定; 分块雅可比矩阵

中图分类号: TM712 文献标识码: A 文章编号: 1003-4897(2005)15-0030-03

0 引言

在缺乏量测量统计特性的条件下, 以量测值与量测估计值之差(残差)的平方和最小为目标函数而建立起来的状态估计方法称为最小二乘估计法。加权最小二乘估计算法则是为了提高估计精度, 各个量测量残差按其精度以不同的权重组成目标函数^[1]。状态估计所采用的各种量测数据不仅包括实时的遥测数据, 还包括人为设置的伪量测量和系统联络点处的虚拟量测量, 它们在目标函数中的权重往往非常悬殊, 再加之系统的一些其他固有病态特性, 导致加权最小二乘状态估计出现数值病态问题。

正则方程 (NE - Normal Equations)法^[2], 给虚拟量测赋予很大的权值将导致其系数矩阵条件数的急剧增大, 方程出现病态。直接采用 Gauss消去或者 Cholesky分解时, 数值稳定性很差, 收敛很慢甚至不收敛。正交变换法^[3,4], 能有效地减轻数值病态问题, 数值稳定性好。但是这种方法需要存储正交变换矩阵, 计算量大, 而且无法实现有功、无功的解耦计算, 严重影响它的实时应用。混合法^[5], 不需要存储正交变换矩阵, 但其数值稳定性比正交变换法要差一些。带约束的正规方程法 (NE/C法)^[2], 将虚拟量测作为等式约束予以考虑, 同时引进拉格朗日乘子, 将有约束的极值问题转化为无约束的极值问题, 避免了赋予虚拟量测很大权值所导致的病态问题。系数矩阵虽然对称, 但不是正定矩阵, 其求解的数值稳定性难以被保证。Hachtel法^[6], 同样将虚拟量测作为等式约束予以考虑, 同时将残差向量也设定为未知量, 从而使得 NE/C中的线性方程

组增广为 Hachtel方程。Hachtel法巧妙地避免了 NE/C方法中 Jacobian矩阵 H 叉乘, 但大大增加了矩阵的阶数, 而且系数矩阵仍为非正定矩阵, 因此矩阵分解过程中仍要考虑选主元, 整个求解需谨慎进行。

本文提出一种基于分块雅可比矩阵的加权最小二乘估计算法。该方法将全部的注入功率量测、虚拟量测和必要的支路量测来构建一组恰好可求解系统全部状态变量的量测集, 将余下的支路功率量测作为量测系统的冗余部分看待, 并依此对量测雅可比矩阵进行分块。分块以后的雅可比矩阵第一部分为对角主元占优的方阵, 雅可比矩阵的第二部分不包含易引起数值病态的注入量测。这样既消除了雅可比矩阵叉乘造成的信息损失, 减轻了雅可比矩阵叉乘的计算量, 又提高了求解过程的数值稳定性。

1 改进的加权最小二乘估计算法

按加权最小二乘准则建立起来的状态变量迭代修正方程式为^[7]:

$$H^T W H x = H^T W [z - h(x)] \quad (1)$$

式中: z 为 m 维量测向量; $h(\cdot)$ 为 m 维量测函数向量; x 为 n 维状态变量; v 为 m 维量测偏差量; $H = \partial h / \partial x$ 为 $(m \times n)$ 阶量测雅可比矩阵; 系数矩阵 $G = H^T W H$ 是 n 阶矩阵; x 是状态变量的修正量; 矩阵 W 是量测权重对角阵, 其对角元分别取相应量测方差的倒数。记 m 为量测量数量, n 为状态变量数量。

如果记 $\tilde{H} = W^{1/2} H$, $\tilde{z} = W^{1/2} [z - h(x)]$, 则式 (1)可写成如下形式:

$$\tilde{H}^T \tilde{H} x = \tilde{H}^T \tilde{z} \quad (2)$$

为方便起见下文约定用 \tilde{H} 代替 H , \tilde{z} 代替 z

并引进中间变量 v , 方程 (2) 等价于如下方程组:

$$V + H x = z \quad H^T V = 0 \quad (3)$$

当系统可观测时, 矩阵 H 列满秩, 对矩阵 H 交换行位置并分块。同时将向量 v 和 z 也进行相应分块, 分块形式如下:

$$H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

在式 (4) 中矩阵 H_1 是 n 阶非奇异方阵, V_1 、 z_1 是 n 维列矢量, H_2 是 $(m - n) \times n$ 阶矩阵, V_2 、 z_2 为 $(m - n)$ 维列矢量。于是方程组 (3) 可记为:

$$\begin{bmatrix} 0 & H_1^T & H_2^T \\ H_1 & I & 0 \\ H_2 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

对方程组 (5) 进行初等变换, 使其系数矩阵具有上三角分块矩阵形式, 可得:

$$\begin{bmatrix} H_1 & I & 0 \\ 0 & H_1^T & H_2^T \\ 0 & 0 & G_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ 0 \\ z_2 - H_2 H_1^{-1} z_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

在式 (6) 中, $G_v = I + H_2 (H_1^T H_1)^{-1} H_2^T$ 。消去中间变量 V_1 、 V_2 后得到:

$$x = H_1^{-1} z_1 + (H_1^T H_1)^{-1} H_2^T [I + H_2 (H_1^T H_1)^{-1} H_2^T]^{-1} (z_2 - H_2 H_1^{-1} z_1) \quad (7)$$

记上式右边第一项为 x_1 , 右边第二项为 x_2 , 则有 $x = x_1 + x_2$ 。

再记矩阵 $K = (H_1^T H_1)^{-1} H_2^T [I + H_2 (H_1^T H_1)^{-1} H_2^T]^{-1}$, 则 $x_2 = K (z_2 - H_2 x_1)$ 。

根据以上的讨论, 方程组 (5) 的解可以通过依次求解如下方程得到:

$$H_1 x_1 = z_1 \quad (8)$$

$$[H_2 (H_1^T H_1)^{-1} H_2^T + I] V_2 = z_2 - H_2 x_1 \quad (9)$$

$$(H_1^T H_1)^{-1} x_2 = H_2^T V_2 \quad (10)$$

设已求得方程 (8) 的解为 $x_1 = \hat{x}_1$, 则方程 (8) 等价于方程:

$$I x_1 = \hat{x}_1 \quad (11)$$

从而方程 (8) 可用方程 (11) 来替代, 则在求解方程 (9)、(10) 计算过程中, 完全可用矩阵 I 来代替矩阵 H_1 。

2 算法实现

2.1 本文算法迭代公式

以 l 表示迭代次数, 则本文算法迭代修正方程式为:

$$H_1 x_1^{(l)} = z_1^{(l)} \quad (12)$$

$$(H_2 H_2^T + I) V_2^{(l)} = z_2^{(l)} - H_2 x_1^{(l)} \quad (13)$$

$$x_2^{(l)} = H_2^T V_2^{(l)} \quad (14)$$

$$x^{(l+1)} = x^{(l)} + x_1^{(l)} + x_2^{(l)} \quad (15)$$

其中: $z_1^{(l)} = z_1 - h_1(x^{(l)})$, $z_2^{(l)} = z_2 - h_2(x^{(l)})$ 。在每一步的迭代过程中, 采用高斯消元法求解方程组 (12) 得到 $x_1^{(l)}$, 采用改进的平方根分解法求解方程 (13) 得到 $V_2^{(l)}$, 然后可得第 l 步状态变量修正值及估计值。

2.2 可观性分析

各注入量测因处于不同的母线上, 显然都是线性无关的。如果全部的注入量测和虚拟量测不足以保证系统可观测, 再加上与该节点相关联的支路功率量测。这样即可保证方阵 H_1 满秩, 方程 (12) 有解。

3 算法分析

3.1 数值稳定性分析

在快速解耦算法中, 选择全部的注入量测和虚拟量测来形成量测雅可比子矩阵 H_1 , 并且它们在 H_1 矩阵中按经节点次序优化后的内节点号^[7]次序排列, 既避免了消元过程中的选主元过程, 又确保了对角主元优势, 保证了求解过程的数值稳定性^[8]。雅可比矩阵 H_1 无需叉乘, 因而可巧妙地抑制因赋予虚拟量测很大权值所带来的数值病态问题。

方程 (13) 的系数矩阵 $(H_2 H_2^T + I)$ 显然是对称正定矩阵。形成矩阵 H_2 的量测全部为支路功率量测, 各支路测量的权值一般不会相差很大, 矩阵 $H_2 H_2^T$ 的条件数也不会很大。因此可对方程 (13) 的系数矩阵 $(H_2 H_2^T + I)$ 进行稳定的 LDU 分解, 形成迭代因子表。

3.2 计算量分析

NE法需要 $(m \times n)$ 阶量测雅可比矩阵叉乘, 本文所提算法在形成方程 (13) 系数矩阵时只需要 $(m - n) \times n$ 阶量测雅可比矩阵叉乘, 大量减少了雅可比矩阵叉乘所带来的计算量。但是当系统冗余度太大 (例如 $m/n > 3$) 时, 将会增加形成、求解 $(m - n)$ 阶方程 (13) 的计算量。因而本文所提的算法, 当系统量测冗余度约小于 3 的时候具有较好的适用性。

4 算例分析

为验证新算法的性能, 在 IEEE4 系统^[7] 上进行了测试, 假定节点 2 为联络节点, 该处存在虚拟量

测。测量数据是在测试系统潮流计算结果的基础上叠加 2% 的误差得到的,将潮流计算的结果作为真值,状态估计结果与潮流计算结果之差的绝对值为估计误差,虚拟量测所赋予的权值是普通遥测量权值的 10^4 倍,并假定没有坏数据。用状态变量的平均绝对估计误差和量测最大估计误差来衡量算法的数值性能,用 NE 算法作为本文算法的比较基础,测试比较结果如表 1 所示。

表 1 测试结果及其比较

Tab 1 Comparison of test results

	平均 迭代 次数	平均 计算 时间	电压平 均估计 误差	相角平 均估计 误差	量测最 大估计 误差	系数矩阵条件数
NE 算法	4	10 ms	0.010 kV	0.010°	3.02	$\text{Cond}(G) = 6.8 \times 10^{11}$
本文算法	4	8 ms	0.007 kV	0.005°	1.72	$\text{Cond}(H_2) = 1.2 \times 10^5$ $\text{Cond}(G_T) = 2.0 \times 10^2$

表 1 中 $\text{Cond}()$ 表示迭代修正方程系数矩阵的条件数,条件数直接刻划了方程组的病态程度^[8]。条件数越大,表明其数值稳定性越差。在状态估计算法的实现过程当中,数值稳定性和计算量永远是一对矛盾,但保证算法的数值稳定性比计算速度要重要得多。测试结果表明:本文所提出的基于分块雅可比矩阵的最小二乘法,能提高求解过程的数值稳定性,同时在一般的量测冗余度条件下,能够减少计算量。

5 结论

本文提出了一种基于分块雅可比矩阵的状态估计算法。该方法将全部的注入功率量测和必要的支路量测并以适当的次序来构造对角主元占优的雅可比矩阵 H_1 ,用它可稳定地直接求解状态变量的修正值 $x_1^{(i)}$;余下的支路功率量测形成雅可比矩阵 H_2 ,在该矩阵中不再包含权值悬殊的注入量测,各支路量测的权值一般也不会相差太大,因而矩阵 $(H_2 H_2^T + I)$ 的条件数正常,保证了求解的数值稳定性。当考虑大权值的虚拟量测时,将它们用来构建矩阵 H_1 ,该矩阵无需差乘,在很大程度上巧妙地抑制了因赋予虚拟量测很大权值所带来的数值病态问题。同时,当量测配置冗余度约小于 3 的时候,能够减少计算量。仿真试验结果表明本文所提方法是有效的。

参考文献:

- [1] 诸俊伟. 电力系统分析 [M]. 南京:东南大学出版社, 1994.
ZHU Jun-wei Power System Analysis [M]. Nanjing: Dongnan University Press, 1994.
- [2] Holten L, Gjelsvik A, Aam S, et al. Comparison of Different Methods for State Estimation [J]. IEEE Trans on Power Systems, 1988, 3 (4): 1798-1806.
- [3] Costa A S, Quintana V H. An Orthogonal Row Processing Algorithm for Power System Sequential State Estimation [J]. IEEE Trans on PAS, 1981, 100 (8): 3791-3800.
- [4] 祝滨, 魏立明, 刘耀年, 等. 地区电力系统状态估计研究与应用 [J]. 电力系统及其自动化学报, 2001, 13 (5): 29-31.
ZHU Bin, WEI Li-ming, LIU Yao-nian, et al. Research and Application of State Estimation on Electrical Distribution System [J]. Proceeding of the EPSA, 2001, 13 (5): 29-31.
- [5] Monticelli A, Murari C A F, Wu F F. A Hybrid State Estimator. Solving Normal Equations by Orthogonal Transformations [J]. IEEE Trans on PAS, 1985, 104 (12): 3460-3468.
- [6] Gjelsvik A, Aam S, Holten L. Hachtel's Augment Matrix Method—a Rapid Method Improving Numerical Stability in Power System Static Estimation [J]. IEEE Trans on PAS, 1985, 104 (11): 2987-2994.
- [7] 于尔铿. 电力系统状态估计 [M]. 北京:水利电力出版社, 1985.
YU Er-keng Power System State Estimation [M]. Beijing: Hydraulic and Electric Power Press, 1985.
- [8] 李红. 数值分析 [M]. 武汉:华中科技大学出版社, 2002.
LI Hong Numerical Analysis [M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2002.

收稿日期: 2004-12-13; 修回日期: 2005-03-09

作者简介:

王珍意 (1980 -), 男, 硕士研究生, 从事电力系统状态估计的研究工作; E-mail: adminhust@163.com

周良松 (1967 -), 男, 博士, 副教授, 从事电力系统安全稳定控制的研究开发和教学工作。

A weighted least squares method for state estimation based on block Jacobian matrix

WANG Zhen-yi, ZHOU Liang-song

(College of Electrical and Electronic Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

(下转第 44 页 continued on page 44)

- [2] Kruglinski D J, 等. Programming Visual C++ 6.0 技术内幕 (第五版) [M]. 北京:北京希望电子出版社, 1999.
Kruglinski D J, et al. Technique Core of Programming Visual C++ 6.0, Fifth Edition [M]. Hope Book Editing Studio, Trans Beijing: Publishing House of Hope Electronics, 1999.
- [3] 孙鸣, 单永梅. 补偿法在继电保护整定计算中的应用 [J]. 电网技术, 2003, 27(7): 28-31.
SUN Ming, SHAN Yong-mei Application of Compensation Algorithm in Setting Software for Line Protection [J]. Power System Technology, 2003, 27(7): 28-31.
- [4] 高艳萍. 补偿法在零序保护整定计算程序中的应用 [J]. 电力自动化设备, 1997, 17(2): 28-31.
GAO Yan-ping Application of Compensation Method in the Program for Zero-sequence Relay Setting [J]. Electric Power Automation Equipment, 1997, 17(2): 28-31.
- [5] 王春, 柳焕章. 一种用于线路开断修改节点阻抗矩阵的简便方法 [J]. 继电器, 1997, 25(4): 12-16.
WANG Chun, LIU Huan-zhang A Convenient Method for Modifying Node Impedance Matrix after a Line Being Disconnected [J]. Relay, 1997, 25(4): 12-16.
- [6] 曹国臣, 宋家骅. 网络分析中计算节点合并与分割的补偿法 [J]. 中国电机工程学报, 1996, 16(3): 171-175.
CAO Guo-chen, SONG Jia-hua The Compensation Method for Manipulating Node Combinations and Separations in Network Analysis [J]. Proceedings of the CSEE, 1996, 16(3): 171-175.
- [7] 柳焕章, 王春, 陈允平. 用于线路开断修改节点阻抗矩阵的新算法 [J]. 武汉水利电力大学学报, 1997, 30(1): 57-59.
LIU Huan-zhang, WANG Chun, CHEN Yun-ping New Algorithm for Modifying Node Impedance Matrix after a Line Being Disconnected [J]. Journal of Wuhan University of Hydraulic and Electric Engineering, 1997, 30(1): 57-59.
- [8] 宛力, 谷水清. 输电线路模拟开断的一种算法 [J]. 东北电力技术, 2000, 12(1): 17-19.
WAN Li, GU Shui-qing A Method for Analogous Breaking of Transmission Lines [J]. North East Electric Power, 2000, 12(1): 17-19.
- [9] 王士和. 长输电线开断过程的分析 [J]. 电气开关, 2001, 2(1): 12-16.
WANG Shi-he A Process Analysis for Breaking of Long Transmission Lines [J]. Switchgear, 2001, 2(1): 12-16.
- [10] 王涛, 王春生. 计算机专家系统在电网补偿度整定计算中的应用 [J]. 锦州师范学院学报 (自然科学版), 2003, 24(3): 30-32.
WANG Tao, WANG Chun-sheng The Application of Computer Expert System in Power System Compensation [J]. Journal of Jinzhou Normal University, Natural Science, 2003, 24(3): 30-32.

收稿日期: 2004-11-10; 修回日期: 2005-01-08

作者简介:

尹亮 (1979 -), 男, 硕士研究生, 研究方向为电力系统继电保护安全与监控; Email: epyinliang@163.com

蔡泽祥 (1960 -), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事电力系统继电保护、电力系统稳定与控制的教学和研究工作。

Break analysis of power network graphics based on compensation algorithm

YN Liang, CAI Ze-xiang

(Electric Power College, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract: In setting calculation and setting up the running mode, the break analysis of power network is very important. Through the partial topology analysis of power network graphics, using the back compensation mode on partial branches only are needed to modify. Using this method the efficiency of setting is advanced. According to this principle, various break pattern of power network in setting program is studied.

Key words: back compensation; break calculation; injecting current; accessional admittance; power network graphic topology; zero-sequence mutual inductance

(上接第 32 页 continued from page 32)

Abstract: This paper presents a weighted least squares method for state estimation based on block Jacobian matrix. In the proposed method, whole injection measurements, highly weighted virtual measurements and a few essential flow measurements make up measures which can be used for resolving all state variables of a power system, while other flow measurements are considered redundant to resolve state variables. In the following, the Jacobian matrix is divided into two blocks and the iterative formula is introduced. The experiment proves that the proposed algorithm can reduce calculation in normal redundant level of measure configure and has good numerical stability.

Key words: power system; state estimation; numerical stability; block Jacobian matrix