改善电力系统谐波分析的加窗插值算法和递推傅氏算法

梅红伟,纪延超

(哈尔滨工业大学电气工程系,黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 傅里叶变换进行电力系统谐波分析时很难做到同步采样和整周期截断,由此造成的频谱泄漏将影响谐波分析的效果;通过加窗和插值可以改善谐波分析的准确度。采用基于两根谱线的加权平均来修正幅值的算法,利用多项式逼近的方法得到频率和幅值的修正公式;同时,提出了用傅里叶递推算法来改善谐波分析的实时性。仿真结果验证了算法的有效性和可行性。

关键词: 谐波分析; 频谱泄漏; 插值; 傅里叶递推算法

中图分类号: TM711 **文献标识码**: A **文章编号**: 1003-4897(2004)24-0006-04

0 引言

随着各种非线性负荷特别是电力电子设备在电力系统中的广泛应用,电网谐波污染日益严重,已经成为影响电能质量的主要公害之一,对电力系统的安全和经济运行造成了极大的影响[1]。所以,对电网中谐波含量进行实时测量,确切掌握电网谐波的实际状况,对于防止谐波危害,维护电网的安全运行是十分必要的。

离散傅里叶变换(DFT)特别是快速傅里叶变换(FFT)算法因其易于微机实现而通常被作为谐波分析的主要方法。然而,电力系统的频率并不是时刻都为额定工频这一恒定值,它会在额定工频左右的一个范围内发生变化,这样就无法保证这个实时的频率是采样频率分辨率的整数倍,也就无法达到同步采样,这是产生栅栏效应和频谱泄漏现象的主要原因之一[2]。插值算法可以消除栅栏效应引起的误差[3~7],频谱泄漏引起的误差则可以用加窗函数的方法来消除[8~10]。本文主要讨论消除栅栏效应的插值算法,采用两根谱线的加权平均来修正幅值,并利用多项式逼近的方法得到频率和幅值的修正公式;同时,考虑到加窗插值算法要求数据量大,普通的傅里叶算法计算量随采样点数会成指数增长的缺点,提出了计算量不随采样点数增加的加窗情况下的递推傅里叶算法。仿真结果验证了递推算法的可行性和插值算法的有效性。

1 插值算法

我们知道泄漏误差来自两方面,由负频信号引入的长范围泄漏和由窗的扇形损失引入的短范围泄漏,长范围泄漏可以通过性能优良的窗函数和增加测量时间来解决,而短范围泄漏可以采用插值的方法来解决,本文只讨论短范围泄漏的问题。

对连续信号 $x(t)$ 用采样频率 f_s 进行等间隔均匀采样得到的离散序例 $\{x(n)\}$,再用长度为 N 的窗序列 $\{w(n)\}$ 加权截断,得到的一组新序列 $x_w(n) = x(n)w(n)$,其对应的频谱:

$$X_w(f) = \frac{1}{2\pi}X(f) * W(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(f)W(f-y)\,dy \tag{1}$$

式中

$$\begin{cases} f = k\dfrac{f_s}{N} \\ X(f) = \int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt \\ W(f) = \sum\limits_{n=0}^{N-1}w(n)e^{-j2\pi n\frac{f}{f_s}} \end{cases} \tag{2}$$

* 为卷积符号。

为了讨论简单,我们设连续信号为 $x(t) = A_0\sin(2\pi f_0t + \phi_0)$,把其代入式(2),可以得到:

$$X(f) = \frac{\pi A_0}{j}\{e^{j\phi_0}\delta[\frac{2\pi(f-f_0)}{f_s}] - e^{-j\phi_0}\delta[\frac{2\pi(f+f_0)}{f_s}]\} \tag{3}$$

把式(3)代入式(1)得到:

$$X_w(f) = \frac{\pi A_0}{j}\{e^{j\phi_0}W[\frac{2\pi(f-f_0)}{f_s}] - e^{-j\phi_0}W[\frac{2\pi(f+f_0)}{f_s}]\} \tag{4}$$

如果选择优良的窗函数,我们就可以忽略负频点 $-f_0$ 处频峰的旁瓣影响,那么正频点 f_0 附近的连续频谱函数可以表示为:

$$X_w^+(f) = \frac{A_0}{2j}e^{j\phi_0}W[\frac{2\pi(f-f_0)}{f_s}] \tag{5}$$

对式(5)离散化,即可得到离散傅里叶变换的

表达式为:

$$X_w^+(k\Delta f) = \frac{A_0}{2j}e^{j\phi_0}W[2\pi(k\Delta f - f_0)/f_s] \quad (6)$$

式中:$\Delta f = f_s/N$ 最小离散频率间隔。

我们由式(6)可以知道,只有严格实现同步采样($f_0 = k\Delta f$, k 为整数),也即观察周期 NT_s 为信号基频周期 T_0 的整数倍时,被测信号含有的各个频率的幅值和相角才能正确计算得到,这与传统频谱分析方法的理论完全一致。然而同步采样很难实现,峰值频率 $f_0 = k_0\Delta f$ 很难正好位于离散谱线频点上,也即 k_0 很难是整数。设该峰值点左右两侧的谱线分别是第 k_1 和 k_2 条谱线,这两条谱线也应该是峰值附近幅值最大和次最大的谱线。自然有 $k_1 \le k_0 \le k_2 = k_1 + 1$,令这两条谱线的幅值峰别为 $Y_1 = |X_w(k_1\Delta f)|$ 和 $Y_2 = |X_w(k_2\Delta f)|$。如果令 $\alpha = k_0 - k_1$,自然 $\alpha \in [0,1]$,则:

$$\frac{Y_2}{Y_1} = \frac{|W[2\pi(1-\alpha)/N]|}{|W[2\pi(-\alpha)/N]|} \quad (7)$$

如果设 $\beta = Y_1/Y_2$,则对于给定的窗函数,式(7)一般可以简化为 $\beta = f(\alpha)$,其反函数为 $\alpha = f^{-1}(\beta)$。

由文献[8]可知,如果允许测量时间大于4个周期,应优先选用4项Blackman - harris窗,它可以将谐波频谱相互泄漏衰减92bB以下,要达到同样衰减,3项窗需测10个信号周期,2项hanning窗需测15个信号周期,而hamming窗和矩形窗几乎不可能;所以,本文选用4项Blackman - harris窗:

$$w(n) = 0.358\,75 - 0.488\,29\cos(2\pi n/N) + 0.141\,288\cos(4\pi n/N) - 0.011\,68\cos(6\pi n/N)$$

式中,$n = 0,1,\cdots,N-1$。

当采集点数较大时,我们可以认为 $\sin(\frac{\alpha}{N}\pi) \approx \frac{\alpha}{N}\pi$, $\cos(\frac{\alpha}{N}\pi) \approx 1$,则式(7)可以化简为:

$$\beta = -(2\alpha^6 - 12\alpha^5 - 941\alpha^4 + 3\,844\alpha^3 + 35\,041\alpha^2 - 77\,802\alpha - 39\,062)\cdot(\alpha+3)/[(2\alpha^6 - 971\alpha^4 + 40\,837\alpha^2 - 430\,500)(\alpha-4)] \quad (8)$$

用多项式拟合,可以得到:

$$\alpha = -2.622\,1 - 0.956\,9\beta + 84.19\beta^2 - 289.745\,3\beta^3 + 423.528\,9\beta^4 - 310.735\,6\beta^5 + 112.888\,6\beta^6 - 16.202\,2\beta^7 \quad (9)$$

幅值的修正公式为了克服单根谱线修正公式易受频谱泄漏和噪声干扰影响的缺点,采用直接对 k_1 和 k_2 两根谱线幅值加权平均,权重分别与各条谱线的幅值成正比。如果设幅值 $A_i = 2Y_i/[W(2\pi(k_i - k_0)/N)]$,其中 $i = 1,2$,则幅值修正公式为:

$$A = \frac{A_1W(2\pi(k_1-k_0)/N) + A_2W(2\pi(k_2-k_0)/N)}{W(2\pi(k_1-k_0)/N) + W(2\pi(k_2-k_0)/N)} = \frac{2(Y_1+Y_2)}{W(2\pi(-\alpha)/N) + W(2\pi(1-\alpha)/N)} \quad (10)$$

相角的修正公式为:

$$\theta = \arg[X_w^+(k_i\Delta f)] + \pi/2 + \arg[W(2\pi(k_i - k_0)/N)] \quad (11)$$

式中:arg()表示复数的主幅角。

信号频率的修正公式为:

$$f_0 = (k_1 + \alpha)\Delta f \quad (12)$$

对式(10)用多项式拟合的方法化解,对式(11)做普通的化解得:

$$A = 1e^6 \times (0.781\,2\alpha^7 - 2.289\,1\alpha^6 + 3.98\alpha^5 - 2.522\,1\alpha^4 + 0.675\,2\alpha^3 - 0.046\,1\alpha^2 + 0.000\,9\alpha + 0.000\,3)(Y_1+Y_2)/N \quad (13)$$

$$\theta = \arg[X_w^+(k_i\Delta f)] + \pi/2 + \pi(\alpha - (-1)^i) \quad (14)$$

2　递推傅氏算法

由于加窗插值算法截断数据长度 N 很大,普通的DFT和FFT算法的计算量会随 N 成指数增长,这样实时性会受到很大的影响;基于DFT和FFT的这一缺点,本文提出了加窗情况下的递推傅里叶算法,它能满足实时性要求。

对于连续信号 $x(t)$ 进行采样得到的离散序例 $\{x(n)\}$,用长度为 N 的窗序列 $\{w(n)\}$ 加权截断,得到一组新序列:$x_w(n) = x(n)w(n)$,其中 $n = 0 \sim (N-1)$。其对应的离散全波傅氏算法为:

$$X_w^n(k\frac{f_s}{N}) = \frac{2}{N}\sum_{i=n-N+1}^{n}u(i)w(i)e^{-(n-i)jk\frac{2\pi}{N}} \quad (15)$$

式中:f_s 为采样频率,N 为数据截断长度,k 为第 k 条谱线,n 为第 n 个采样点。

由式(15)知道:

$$X_w^n(k\frac{f_s}{N}) = \frac{2}{N}[u(n)w(n) + u(n-1)w(n-1)\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}} + \cdots + u(n-N+1)w(n-N+1)\cdot e^{-(N-1)jk\frac{2\pi}{N}}] \quad (16)$$

$$X_w^{n-1}(k\frac{f_s}{N}) = \frac{2}{N}[u(n-1)w(n-1) + u(n-2)w(n-2)e^{-jk\frac{2\pi}{N}} + \cdots + u(n-N)\cdot$$

$$w(n-N)e^{-(N-1)jk\frac{2\pi}{N}}] \qquad (17)$$

将式(16) - 式(17) ×$e^{-jk\frac{2\pi}{N}}$得:

$$X_w^n(k\frac{f_s}{N}) = X_w^{n-1}(k\frac{f_s}{N})e^{-jk\frac{2\pi}{N}} + \frac{2}{N}[u(n)w(n) - u(n-N)w(n-N)] \qquad (18)$$

将其展开成实部和虚部为:

$$X_w^n(k\frac{f_s}{N})_R = X_w^{n-1}(k\frac{f_s}{N})_R\cos(k\frac{2\pi}{N}) + X_w^{n-1}(k\cdot\frac{f_s}{N})_I\sin(k\frac{2\pi}{N}) + \frac{2}{N}[u(n)w(n) - u(n-N)w(n-N)] \qquad (19)$$

$$X_w^n(k\frac{f_s}{N})_I = -X_w^{n-1}(k\frac{f_s}{N})_R\sin(k\frac{2\pi}{N}) + X_w^{n-1}(k\cdot\frac{f_s}{N})_I\cos(\frac{2\pi}{N}) \qquad (20)$$

式(18)、(19)、(20) 即是加窗函数情况下,离散傅氏算法的递推公式。从中我们可以得出,每次递推过程只需计算7次乘法和4次加减法,计算量与数据截断长度 N 无关;并且计算过程可以伴随着采样过程同时进行,无需像普通的傅氏算法那样采样完 N 个点后才开始计算,很好地改善了实时性,在 N 取值很大时,改善效果尤为明显。

我们定义采样结束后还需完成的计算量为余留计算量。DFT的余留计算量为 N^2 次加乘运算,FFT的预留计算量为 $(N/2)\log_2 N$ 次加乘运算,而递推傅里叶算法的余留计算量小于7 K次加乘运算,其中 k 为需要求的谐波总数,很明显一般情况下递推傅立叶算法的余留计算量远小于DFT和FFT。实质上,递推傅立叶算法并没有减少整体的计算量,它只是把计算量分散,使得每次采样结束时余留计算量变得很少,并且余留计算量还不受截断长度 N 的影响。

3 仿真结果

为了验证算法的可行性,本文给出如下信号进行了谐波分析的仿真:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{7}(8-i)\sin(i2\pi f_1 t + \pi/i) \qquad (21)$$

其中,基波频率f_1分为49.9 Hz和50.1 Hz两种情况,采样频率 f_s 为3 200 Hz,截断信号的数据长度 N 取512点。在仿真中,实验信号首先加以窗函数,再用本文推导的加窗情况下的递推傅氏公式计算出离散频谱 $X_w^+(k_i\Delta f)$;然后,分别按照不修正算法和修正算法计算基波频率、谐波幅值和相角。具体做法,不修正算法是在43.75～56.25 Hz的范围内选取幅值最大的谱线,将其频率、幅值和相角作为基波的频率 f'_1、幅值 Y'_1 和相角 θ'_1;谐波在$(if'_i - 6.25) - (if'_1 + 6.25)$ Hz的频率范围内,采用比较的方法选择谱线幅值最大的作为 i 次谐波,对应的幅值和相角为 i 次谐波的幅值和相角。修正算法是在43.75～56.25 Hz的范围内选取幅值最大的谱线,再在其两边比较出次最大的谱线,从而确定 k_1、k_2 和 Y_1、Y_2;然后由式(9) 和式(12) 分别求出辅助参数 α和基波频率 f''_1。选择距离 if''最近的左右两根谱线,按照公式(13)、(14) 计算幅值和相角。仿真结果由表1给出,其中 Δf_1 表示计算出的频率相对于真实频率的误差,ΔA_1～ΔA_7 和$\Delta\theta_1$～$\Delta\theta_7$ 表示基波及各次谐波的测量幅值和相角相对于真实值的误差。

上述仿真结果表明,加窗情况下,递推傅里叶算法是可行的;本文采用的两根谱线幅值加权的修正算法达到了很高的计算精度,较之不修正的算法,计算结果准确性有很大的提高,同时幅值修正公式也达到了较高的计算精度。

表1　加Blackman-harris窗情况下,修正和不修正算法的仿真结果比较

Tab.1　Comparison between the simulation results of the revised and unrevised algorithms adding Blackman-harris

基频给定值		误差 / %							
		Δf_1	ΔA_1	ΔA_2	ΔA_3	ΔA_4	ΔA_5	ΔA_6	ΔA_7
49.9 Hz	不修正	0.200 4	0.682 9	- 2.543	- 2.496	- 1.622 5	0.093 3	3.475	12.48
	修正	0.012 5	0.005 7	- 0.031 7	0.078	- 0.105 0	0.080	- 0.03	0.01
50.1 Hz	不修正	- 0.199 6	- 0.722 9	2.84	1.896	0.22	- 3.47	8.66	- 19.67
	修正	- 0.006 2	- 0.107 1	0.28	- 0.457 5	0.012 5	- 0.053	0.015	0.01

基频给定值		误差 / %						
		$\Delta\theta_1$	$\Delta\theta_2$	$\Delta\theta_3$	$\Delta\theta_4$	$\Delta\theta_5$	$\Delta\theta_6$	$\Delta\theta_7$
49.9 Hz	不修正	49.54	295.00	- 62.79	- 24.87	92.53	42.37	70.09
	修正	1.09	1.20	- 1.16	- 0.07	- 3.78	2.96	- 3.08
50.1 Hz	不修正	50.21	- 95.00	- 36.77	24.55	88.92	156.21	225.80
	修正	1.71	- 1.00	0.27	0.55	- 1.43	- 0.748	0.464

4 结论

本文提出的基于递推傅里叶变换的加窗插值算法应用于谐波测量,十分有效地提高了测量精度,这对电力系统中的谐波管理和治理都有重要的意义。加窗插值方法对傅里叶变换进行修正,能够减少泄漏,有效地抑制谐波之间、杂波和噪声的干扰,从而可以精确测量各次谐波的电压、电流的幅值和相位;递推算法可以很好地分散计算量,从而有效地减少了余留计算量,提高了谐波分析的实时性。

参考文献:

[1] Davis E J, Emanuel A E. Harmonic Pollution Metering: Theoretical Considerations[J]. IEEE Trans on Power Delivery, 2000, 15(1): 19-23.

[2] Heydt G T, Jewell W T. Pitfalls of Electric Power Quality Indices[J]. IEEE Trans on Power Delivery, 1998, 13(2): 570-578.

[3] Grandke T. Interpolating Algorithms for Discrete Fourier Transforms of Weighted Signals[J]. IEEE Trans on IM, 1983, 13(2): 350-355.

[4] 张伏生,耿中行,葛耀中(ZHANG Fu-sheng, GENG Zhong-xing, GE Yao-zhong). 电力系统谐波分析的高精度FFT算法(FFT Algorithm with High Accuracy for Harmonic Analysis in Power System)[J]. 中国电机工程学报(Proceedings of the CSEE), 1999, 19(3): 63-66.

[5] 庞浩,李东霞,俎云霄,等(PANG Hao, LI Dong-xia, ZU Yun-xiao, et al). 应用FFT进行电力系统谐波分析的改进算法(An Improved Algorithm for Harmonic Analysis of Power System Using FFT Technique)[J]. 中国电机工程学报(Proceedings of the CSEE), 2003, 23(6): 50-54.

[6] 赵文春,马伟明,胡安(ZHAO Wen-chun, MA Wei-ming, HU An). 电机测试中谐波分析的高精度FFT算法(FFT Algorithm with High Accuracy for Harmonic Analysis in Electric Machine)[J]. 中国电机工程学报(Proceedings of the CESS), 2001, 21(12): 83-87.

[7] 潘文,钱俞寿,周鹗(PAN Wen, QIAN Yu-shou, ZHOU E). 基于加窗差值FFT的电力谐波测量理论(II)双插值FFT理论(Power Harmonics Measurement Based on Windows and Interpolated FFT (II) Dual Interpolated FFT Algorithms)[J]. 电工技术学报(Transactions of China Electrotechnical Society), 1994, 9(2): 53-56.

[8] 潘文,钱俞寿,周鹗(PAN Wen, QIAN Yu-shou, ZHOU E). 基于加窗差值FFT的电力谐波测量理论(I)窗函数研究(Power Harmonics Measurement Based on Windows and Interpolated FFT (I) Study of Windows)[J]. 电工技术学报(Transactions of China Electrotechnical Society), 1994, 9(1): 50-54.

[9] Heydt G T, Fjeld P S, Liu C C, et al. Applications of the Windowed FFT to Electric Power Quality Assessment[J]. IEEE Trans on Power Delivery, 1999, 14(4): 1411-1416.

[10] Andria G, Savino M. Windows and Interpolation Algorithms to Improve Electrical Measurement Accuracy[J]. IEEE Trans on Instrumentation and Measurement, 1999, 38(4): 856-863.

收稿日期: 2004-04-29

作者简介:

梅红伟(1979-),男,硕士研究生,研究方向为电力电子技术及其在电力系统中的应用;E-mail: runnermhwe@hit.edu.cn

纪延超(1962-),男,教授,博导,研究方向为电力电子技术及其在电力系统中的应用。

Window functions, interpolation and Fourier transform recursive algorithm for improving the harmonic analysis of power system

MEI Hong-wei, JI Yan-chao

(Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: There are difficulties in performing synchronized sampling and integral period truncation in the harmonic analysis of power system with the Fourier transform technique, and the measuring results will be disturbed by the frequency leakage. The utilization of window functions and interpolation algorithms can improve the accuracy of harmonic analysis. An improved algorithm is introduced in this paper, with which the frequency and amplitude of harmonic can be estimated. The polynomial approximation method is employed to obtain simple formulae for frequency and amplitude correction. In order to improving real-time performance, recursive algorithm of Fourier transform is presented. The simulation results have verified the effectiveness and feasibility of the algorithms.

Key words: harmonic analysis; frequency leakage; interpolation; recursive algorithm of Fourier transform