

# 基于 FFT 的傅里叶算法在微机继电保护中的应用

刘建刚, 孙同景

(山东大学控制科学与工程学院, 山东 济南 250061)

摘要: 传统的微机继电保护算法中, 一般使用梯形算法<sup>[1]</sup>来计算周期信号的直流分量和各次谐波的系数, 此方法计算比较复杂。本文提出了一种基于 FFT 的算法。该算法利用 FFT 可以由输入序列直接计算出输入信号的直流分量和各次谐波的幅值和相角的特点, 大大简化了谐波分析的计算。与梯形算法相比, 该算法具有精度高、计算量小、更易在数字信号处理器上实现等优点。因而可以取代梯形算法来计算谐波系数。针对 FFT 计算, 还介绍了正弦信号采样频率的选择方法。

关键词: 傅里叶算法; FFT; 微机继电保护; 谐波分析

中图分类号: TM771 文献标识码: A 文章编号: 1003-4897(2004)10-0024-03

## 0 引言

在微机继电保护中, 有两种形式的滤波器可供选择: 一种是模拟滤波器, 另一种是数字滤波器。同模拟滤波器相比, 由于数字滤波器具有“高精度、高灵活性和高稳定性以及便于时分复用<sup>[1]</sup>”等优点, 因此目前所研制的电力监控产品中, 绝大多数都用到数字滤波算法。其中傅里叶算法因能够有效地去除直流分量和谐波干扰, 并且可以有选择地单独计算谐波分量, 所以被广泛地应用于谐波分析中。

FFT 由于具有原位性, 计算量较小并且易于流水线操作等特点, 所以非常适合用数字信号处理器(DSPs)进行处理。我们可以通过一定的转换和计算, 用 FFT 来实现傅里叶算法, 可以大大减小运算量, 而且使其更易于通过 DSPs 实现。

## 1 傅里叶算法的应用

傅里叶算法的基本思想源于傅里叶级数。该算法假设输入信号为一周期性信号, 即输入信号中除基频分量外, 只包含恒定的直流分量和各种整次谐波分量。此时电压(电流)输入信号可表示为:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(k_n t) + b_n \sin(k_n t)]$$

也可以合并为:

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(k_n t + \varphi_n) \quad (1)$$

其中:

$$c_0 = a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} x(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} x(t) \cos(k_n t) dt \quad (2)$$

$$b_k = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} x(t) \sin(k_n t) dt \quad (3)$$

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad (4)$$

$$\tan \varphi_k = -\frac{b_k}{a_k} \quad (5)$$

式中:  $T_1$  为周期信号的周期,  $c_0$  为直流分量,  $c_k$  为  $k$  次谐波的幅值,  $c_k / \sqrt{2}$  为  $k$  次谐波的有效值。

对于周期连续信号  $x(t)$ , 式(2)和式(3)的积分可用梯形法则<sup>[1]</sup>求得:

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\frac{2\pi}{N} nk\right) \quad (6)$$

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin\left(\frac{2\pi}{N} nk\right) \quad (7)$$

其中:  $N$  为一周期内采样的点数;  $x(n)$  为第  $n$  次采样值,  $n=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

当输入为电压(电流)信号时, 由式(4)、(5)、(6)、(7)得出的  $c_k$  和  $\varphi_k$  分别对应着电压(电流)的  $k$  次谐波的幅值  $U_k(I_k)$  和  $k$  次谐波的相位  $\varphi_k(\varphi_k)$ , 由此可计算出电压(电流)的  $k$  次谐波的有效值。

在此基础上还可以计算出  $k$  次谐波的有功功率  $P_k$ , 无功功率  $Q_k$ , 视在功率  $S_k$ <sup>[2]</sup>。

$$P_k = U_k I_k \cos(\varphi_k - \varphi_k)$$

$$Q_k = U_k I_k \sin(\varphi_k - \varphi_k)$$

$$S_k = U_k I_k = \sqrt{P_k^2 + Q_k^2}$$

同时也可以计算出  $k$  次谐波的电压(电流)含有率  $HRU_k(HRI_k)$

$$HRU_k = \frac{U_k}{U_1} \times 100\%$$

同理也可以算出电压(电流)谐波总畸变率  $THD_u$  ( $THD_i$ )

$$THD_u = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{N_k} U_k^2}}{U_1} \times 100\%$$

## 2 基于 FFT 的傅里叶算法的实现

在傅里叶算法中,每计算 1 次  $a_k$  或  $b_k$  就要计算 1 次式(6)或(7),很不方便;而且当需要计算的谐波次数很高时,就会造成很大的计算量。为了克服这些缺点,可以利用傅里叶级数和离散傅里叶变换的关系,通过 FFT 代替梯形法则(式(6)、(7))来计算  $a_k$  和  $b_k$ 。

离散傅里叶变换(DFT)和快速傅里叶变换(FFT)实质上是同种变换,FFT只不过是利用DFT系数  $e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$  的对称性、周期性和可约性等性质将长序列的DFT分解为若干个短序列的DFT计算,然后再按一定规则将其合并,从而得到整个的DFT。因此对FFT的研究,实际上就是对DFT的研究。

根据离散傅里叶变换有

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (8)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (9)$$

其中:  $N$  表示时域中一周期的采样点数,  $n=0,1,2,\dots,N-1$ ;  $k=0,1,2,\dots,N-1$ 。

将  $x(t)$  表示成傅里叶级数的指数形式:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(jk_{-1}) e^{jk_{-1}t} \quad (10)$$

其中:

$$X(jk_{-1}) = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} x(t) e^{-jk_{-1}t} dt \quad (11)$$

根据傅里叶指数形式和三角形式的关系有:

$$X(jk_{-1}) = \frac{1}{2} (a_k - j b_k) \quad (12)$$

根据傅里叶级数性质不难得到:

$$c_k = 2 X(jk_{-1}) \quad (13)$$

$$k = \arg(X(jk_{-1})) \quad (14)$$

要将连续的周期信号的傅里叶级数和 DFT 联系起来,就需要在时域内对  $x(t)$  进行抽样,抽样间隔为  $T$ 。一周期内的抽样点数为  $N$ ,则  $N = \frac{T_1}{T}$ 。根据信号的时域和频域的对称关系,当信号在时域中

被抽样后,其频域内的频谱以抽样频率  $f_s = \frac{1}{T}$  做周期性延拓。一周期内的角频率间隔为  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ ,频率  $f_1$  表示为  $f_1 = \frac{1}{T_1}$ ,则频域内一周期的抽样点数为  $N = \frac{f_s}{f_1} = \frac{T_1}{T}$ 。

$$x(t) \rightarrow x(nT) \rightarrow x(n)$$

$$dt \rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} T$$

$$X(jk_{-1}) = \frac{T}{T_1} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jk_{-1}nT} \quad (15)$$

$$T = \frac{T_1}{N} \quad T = 2 \frac{T_1}{N}$$

带入式(15)得

$$X(jk_{-1}) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (16)$$

其中:  $n=0,1,2,\dots,N-1$ ;  $k=0,1,2,\dots,N-1$ 。

比较式(8)不难看出:

$$X(jk_{-1}) = \frac{1}{N} DFT(x(n)) = \frac{1}{N} X(k) \quad (17)$$

式(17)表明了连续的周期信号被抽样后其离散傅里叶变换序列和傅里叶级数系数序列的关系。

比较式(12)和(17),可得:

$$a_k = \text{Re} \left[ \frac{2}{N} X(k) \right], \quad b_k = -\text{Im} \left[ \frac{2}{N} X(k) \right]$$

可以看出  $a_k$  和  $b_k$  分别与  $X(k)$  的实部和虚部相对应(不是相等)。

将式(17)带入式(13)、(14)得:

$$c_k = \frac{2}{N} |X(k)| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$k = \arg(X(k)) = -\frac{b_k}{a_k}$$

得到了  $c_k$  和  $k$ ,就可以按照 1 中所介绍的公式进行功率计算和谐波分析了。

## 3 采样点数 $N$ 的选择

在现场测量中,要得到精确的计算结果,采样频率的选择很重要。如果采样频率过高,虽提高了计算精度,但增加了计算量,会影响到实时性;如果采样频率过低,会造成其频域的混叠,而无法如实地反映出原来的信号。

对于一般的连续信号,根据时域抽样定理,应有:

$$f_s \geq 2f_m$$

其中:  $f_s$  为采样频率,  $f_m$  为奈奎斯特频率, 但是对于正弦信号, 由于其频谱是谱线(在  $\pm f_0$  处的函数), 既不能简单地视为带限信号, 也不能简单地视为窄带信号。当其初相不确定时, 若选取  $f_s = 2f_m$ , 有可能导致波形的严重失真。

对于正弦信号

$$x(t) = A \sin(2 f_1 t + \phi)$$

若选择抽样频率  $f_s = 2f_1$  则会出现以下三种情况<sup>[3]</sup>:

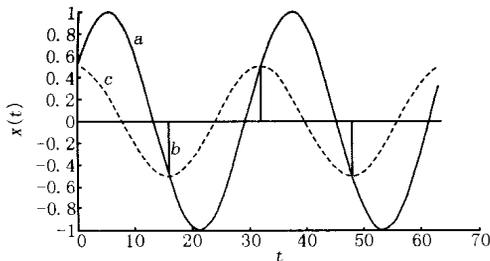
当  $\phi = \pi/2$  时, 可以由  $x(n)$  重建  $x(t)$ ;

当  $\phi = 0$  时, 无法由  $x(n)$  重建  $x(t)$ ;

当  $0 < \phi < \pi/2$  时, 由  $x(n)$  重建出的不是  $x(t)$ , 而是幅值为  $x(t) = A \sin(\phi)$ 、初相为零的同频余弦信号。若  $\phi$  确定, 可以得到原信号  $x(t)$ ; 若  $\phi$  不确定, 则无法得到原信号  $x(t)$ 。

只有当  $f_s = 3f_m$  时, 才可以保证任何初相位情况下, 由  $x(n)$  重建  $x(t)$ 。

结论 显而易见: 若  $\phi = 0$ , 则一个周期内抽得的两点全是零, 自然无法重建  $x(t)$ ; 结论 可以通过图 1 说明。



注: a 是  $x(t) = \sin(2 f_1 t + \phi)$ , 其中  $\phi$  不确定; b 是  $f_s = 2f_m$  时的采样结果; c 是由 b 重建的信号。

图 1 不同初相的正弦信号的重建

Fig. 1 Rebuilt of sine signal with different phases

由图 1 可以看到, 由抽样的信号 b 重建的信号 c 即  $x(t) = \sin \cos(2 f_1 t)$  不是原信号 a, 而是幅值变为  $\sin \phi$ , 初相为零的余弦信号。对于结论 的证明, 详见参考文献 [3]。

对于基 2 的 FFT 算法, 采样频率(一周期的采样点)可按如下方法确定:

- 1) 首先确定所要分析的谐波次数  $k$  (例如 13);
  - 2) 每个周波至少采  $3k$  (39) 点;
  - 3) 为了采用基 2 的 FFT, 采样点数应扩大到邻近的  $2^l$  个(39 扩大到 64 点);
  - 4) 然后用上述的算法进行分析计算。
- 这里需‘注意的一点是, 若得出的采样点  $3k$  与

邻近的  $2^l$  相差很多(如 69 扩大到 128 点), 此时仍然按方法(3)的话, 会造成存储空间的很大浪费。在这种情况下, 若能保证实时性的条件下, 不使用基 2 的 FFT 算法, 而将  $3k$  扩大到邻近的一个可以分解为几个素数相乘的数(如  $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ ), 从而采用另一种 FFT 算法 - 混合基算法<sup>[4]</sup>。此时采用 72 点混合基 FFT 算法比 128 点的基 2 的 FFT 算法的计算量要稍高一些(比梯形法则的要低), 但是却能大大地节省存储空间, 有利于提高产品的性能价格比。

#### 4 两种方法的计算量比较

由于计算机处理中, 乘法运算所需时间比加法多的多, 所以现以乘法为例, 进行计算量的比较。

从上面的推导可以看出只要计算出  $a_k$  和  $b_k$ , 就可以由此推导出其它的结果。而 FFT 算法和傅里叶算法的不同之处在于推导  $a_k$  和  $b_k$  的方法不同: FFT 算法利用离散傅里叶变换先求出  $X(k)$ , 而  $a_k$  和  $b_k$  正好对应着(不是等于)  $X(k)$  的实部和虚部, 其计算量为  $\frac{N}{2} \log_2 N$  次复乘<sup>[4]</sup>, 考虑到  $x(t)$  为实数序列, 故 1 次复乘需 2 次实数乘法, 这样用 FFT 算法计算  $a_k$  和  $b_k$  需要  $N \log_2 N$  次实数乘法; 而傅里叶算法是利用梯形法则即式(6)和(7)得到的, 每计算 1 次  $a_k$  或  $b_k$ , 各需要  $N$  次实数乘法,  $k$  次谐波系数的计算量为  $2Nk$ 。那么傅里叶算法和 FFT 算法计算量之比为

$$\frac{2Nk}{N \log_2 N} = \frac{2k}{\log_2 N}$$

若以时域 64 点采样, 取 13 次谐波为例, 其比值大于 4, 这样, 采用 FFT 后, 计算量减少了约 75%。而且当需要更高次谐波时, 这个比值还可以增加(根据 3 中的选点方法, 64 点的 FFT 可以支持 21 次谐波), 同时不必修改程序, 在满足 3 中的采样条件的前提下, 直接由相应的  $X(k)$  计算即可。

#### 5 结论

由于数字信号处理器(DSPs)特殊的硬件结构和编程环境, 能高速、实时地实现 FFT。因此利用 FFT 来实现傅里叶算法, 既减少了计算量, 又使这种算法更加适合于 DSPs 的处理, 从而在保证不降低精度的条件下, 提高了处理的准确性和实时性, 同时也大大方便了软件编程。

(下转第 30 页 continued on page 30)

- cation[J]. IEEE Trans on Power Delivery, 2000, 15(1):14-18.
- [6] Philip J T, Neville R W. Marginal Pricing of Harmonic Injections[J]. IEEE Trans on Power Systems, 2002, 17(1): 50-56.
- [7] Scott C S, Michael J D. Fourier Based Three Phase Power Metering System [A]. Proceedings of the 17th IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference [C]. 2000. 30-35.
- [8] 孙仲康(SUN Zhong-kang). 快速傅立叶变换及其应用(FFT and Its Application) [M]. 北京:人民邮电出版社(Beijing:People's Posts & Telecommunications Press), 1982.
- [9] 谢明, 丁康(XIE Ming, DING Kang). 频谱分析的校正方法(A Calibration Method of Frequency Spectrum Analysis) [J]. 振动工程学报(Journal of Vibration Engineering),

1994, 7(2): 172-179.

- [10] 赵旺初(ZHAO Wang-chu). 电力网的谐波源及降低谐波的措施(Harmonic Wave Source in Power Networks and Measures to Reduce Harmonic Wave) [J]. 电力建设(Electric Power Construction), 1999, 9:22-24.

收稿日期: 2003-09-01; 修回日期: 2004-02-12

作者简介:

林盾(1967-),男,工程师,从事电力系统供电技术管理工作;

蓝磊(1969-),女,博士研究生,讲师,从事高电压技术方面的教学与科研工作;

柴旭峥(1978-),男,博士研究生,研究方向为高电压技术。

### Modified model of power metering based on FFT of harmonic analysis

LIN dun<sup>1</sup>, LAN Lei<sup>2</sup>, CHAI Xu-zheng<sup>2</sup>

(1. Hainan Power Corporation, Haikou 570203, China;

2. School of Electrical Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

**Abstract:** With the state of serious harmonic pollution in the electric network, improving the precision of power metering becomes more and more important. This paper analyses the accuracy of present power metering methods, and based on the harmonic analysis of power metering, it provides the power metering model of Hanning-weighted interpolating FFT with its numerical simulation, and the calculation results show that the modified model reveals high accuracy without much extra computation. By the aid of high performance DSP and other hardware, the power metering model of Hanning-weighted interpolating FFT is quite useful in engineering applications.

**Key words:** power metering; harmonic analysis; Hanning-weighted interpolating; FFT

(上接第 26 页 continued from page 26)

### 参考文献:

- [1] 杨奇逊(YANG Qi-xun). 微机继电保护基础(Basis of Microcomputer Relay Protection) [J]. 华北电力学院(Journal of North China Electric Power College), 1988.
- [2] 邱关源(QIU Guan-yuan). 电路(第三版)(Circuit, Third Edition) [M]. 北京:高等教育出版社(Beijing: Higher Education Press), 1989.
- [3] 胡广书(HU Guang-shu). 数字信号处理——理论与算法与实现(Digital Signal Processing——Theory, Algorithm and Implementation) [M]. 北京:清华大学出版社(Beijing: Tsinghua University Press), 1997.

inghua University Press), 1997.

- [4] 程佩清(CHENG Pei-qing). 数字信号处理教程(第二版)(Digital Signal Processing Tutorial, Second Edition) [M]. 北京:清华大学出版社(Beijing: Tsinghua University Press), 2001.

收稿日期: 2003-09-01; 修回日期: 2003-11-13

作者简介:

刘建刚(1975-),男,硕士研究生,研究方向为基于 DSPs 的馈线自动化终端单元的研制;

孙同景(1948-),男,教授、博士生导师,研究方向为基于 DSPs 的馈线自动化终端单元的研制。

### Application of Fourier algorithm based on FFT in microcomputer-based relay protection

LIU Jian-gang, SUN Tong-jing

(School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China)

**Abstract:** Based on FFT, this paper puts forward a kind of power protection algorithm, with which the coefficients of fundamental and harmonics can be acquired directly from input sequence, so that the harmonic analysis is simplified greatly. Compared with traditional Fourier algorithm, the proposed one is more accurate, simpler and easier to achieve on DSP. So it can take place of the traditional Fourier algorithm to calculate the coefficients of harmonics. Also, a method of deciding the sampling frequency of sine wave is introduced.

**Key words:** Fourier; FFT; microcomputer relay protection; harmonic analysis