贝叶斯法在继电器可靠性评估中的应用

潘茂庆,惠克翔,张有来,王奇

(空军第一航空学院,河南 信阳 464000)

摘要: 简要介绍了贝叶斯方法的基本原理,较系统地论述了贝叶斯方法评估继电器的失效率、平均无故障工作时间和可靠度,并提供了先验分布参数的确定方法,最后用实例作了说明。

关键词: 贝叶斯方法; 继电器; 可靠性评估

中图分类号: TM58　**文献标识码**: B　**文章编号**: 1003-4897(2003)05-0027-03

1　引言

传统的继电器可靠性评估方法仅利用当前的试验信息,对以前的信息,即使有用也不加以利用,这样势必要增加很多试验工作量和试验费用,而且产品可靠指标越高,试验周期越长,试验费用也越大。为了解决这个矛盾,采用贝叶斯法是一种极有效的途径。

2　贝叶斯法的基本原理

贝叶斯法的基本思想[1,2]是:既利用当前批产品的样本试验结果,又利用以往批产品的样本试验结果和使用信息。以往批信息可求出先验分布,为先验信息,而当前批的信息为后验信息。把先验信息和后验信息代入贝叶斯公式,可求出当前批产品的失效分布,也就是后验分布,从而求出可靠性指标。这一批产品的后验分布又可作为下一批产品的先验分布,提高了信息利用率和评估的置信度。可见,使用贝叶斯法作评估,具有明显的经济效益。使用贝叶斯法时,要求当前批产品近似于以往批产品的失效分布,这就要求产品生产稳定。否则,影响评估结果的准确度。

下面推导贝叶斯法的数学表达式[3]。

2.1　失效率 λ 的估计

如产品的寿命 t 为指数分布,失效率为 λ,且在累计试验时间 T 内出现的失效率 γ 服从泊松分布,则此时 λ 先验分布为伽玛分布,即可满足要求,即

$$g(\lambda) = T_0^{r_0}\lambda^{r_0-1}e^{-\lambda T_0}/\Gamma(r_0)$$

$$(r_0 \geq 0, T_0 > 0) \tag{1}$$

如设随机变量为累计试验时间 T,则其抽样分布为

$$f(T|\lambda) = \frac{T^r\lambda^r e^{-\lambda T}}{\Gamma(r)} \tag{2}$$

并由式(1)、(2)可求得

$$g(\lambda \mid T) = \frac{(T_0+T)^{r_0+r}}{\Gamma(r_0+r)}\lambda^{r_0+r-1}e^{-\lambda(T_0+T)} \tag{3}$$

按数学期望的定义有

$$\bar{\lambda} = E(\lambda) = \int_0^\infty \lambda g(\lambda|T)\,d\lambda = \frac{(T_0+T)^{r_0+r}}{\Gamma(r_0+r)}\cdot\frac{\Gamma(r_0+r+1)}{(T_0+T)^{r_0+r+1}}$$

将 $\Gamma(r_0+r+1) = (r_0+r)\Gamma(r_0+r)$ 代入上式,则有

$$\bar{\lambda} = \frac{r_0+r}{T_0+T} \tag{4}$$

按方差定义有

$$\sigma^2 = D(\lambda) = \int_0^\infty \lambda^2 g(\lambda|T)\,d\lambda - [E(\lambda)]^2 =$$

$$\frac{r_0+r}{(T_0+T)^2} = \frac{\bar{\lambda}}{T_0+t} \tag{5}$$

由式(4)和(5)可得

$$\lambda = \bar{\lambda} \pm \sigma = \frac{r_0+r}{T_0+T} \pm \frac{\sqrt{r_0+r}}{T_0+T} \tag{6}$$

为求得先验分布数 r_0、T_0,可采用以下方法:假设按传统方法已知失效率的点估计 λ_0 及置信度为 $1-\alpha$ 失效率上限 λ_U,则根据以下两式用试探即可确定 r_0、T_0。

$$\frac{\lambda_U}{\lambda_0} = \frac{x^2(2r_0+2, 1-\alpha)}{2r_0} \tag{7}$$

$$T_0 = r_0/\lambda_0 \tag{8}$$

2.2　平均无故障工作时间的估计

设 $\theta = 1/\lambda$ 为指数分布的平均无故障工作时间,则根据式(1)和式(3)可得相应的先验分布和后验分布,即

$$g(\theta) = \frac{T_0^{r_0}}{\Gamma(r_0)}\left(\frac{1}{\theta}\right)^{r_0+1}e^{-\frac{T_0}{\theta}} \tag{9}$$

$$g(\theta|T) = \frac{(T_0+T)^{r_0+r}}{\Gamma(r_0+r)}\cdot\left(\frac{1}{\theta}\right)^{r_0+r+1}e^{-(T_0+T)/\theta} \tag{10}$$

由此可得 $MTTF$ 的平均值

$$\overline{MTTF} = E(\theta) = \frac{T_0 + T}{r_0 + r - 1} \tag{11}$$

离差 $\sigma^2 = D(\theta) = \int_0^{\infty} \theta^2 g(\theta | T) \mathrm{d}\theta -$

$$[E(\theta)]^2 = \overline{MTTF}^2 / (r_0 + r - 2) \tag{12}$$

2.3 可靠度估计

以二项抽样估计产品的可靠度。这是一个事件的 n 次独立观察过程,这个事件在每一次试验中出现的概率是一个常数 θ,且其服从以下概率分布

$$f(x | \theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}, \quad 0 < \theta < 1, x = 0,1 \tag{13}$$

假设对一特殊产品,到固定时间 t 仍能正常工作的是一个固定而未知的可靠性度量 $R(t) = \overline{\theta}$,可以从一批产品中随机抽得,且不同的 θ 服从一个先验分布 $g(\theta)$。在工程应用中,这个先验分布往往假设为贝塔分布,且其先验分布密度为:

$$g(\theta) = \frac{\Gamma(n_0)}{\Gamma(s_0)\Gamma(n_0 - s_0)} \theta^{s_0 - 1} (1 - \theta)^{n_0 - s_0 - 1}$$

$$0 < \theta < 1, 0 < s_0 \leq n \tag{14}$$

由于随机变量$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是相互独立的,故从式(13)可知,随机变量独立观察值的概率密度为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i} (1 - \theta)^{1 - x_i} =$$

$$\theta^s (1 - \theta)^{n - s} \tag{15}$$

式中:$s = \sum x_i$ 表示在给出的 n 个产品中,到 t 时刻仍然能正常工作的产品数。于是边缘分布为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) =$$

$$\frac{\Gamma(n_0)}{\Gamma(s_0)\Gamma(n_0 - s_0)} \cdot \frac{\Gamma(s + s_0)\Gamma(n - s + n_0 - s_0)}{\Gamma(n - n_0)} \tag{16}$$

可得后验分布为

$$g(\theta | x_1, x_2, \cdots, x_n) =$$

$$\frac{\Gamma(n + n_0)}{\Gamma(s_0 + s)\Gamma(n_0 - s_0 + n - s)} \theta^{s + s_0 - 1} (1 - \theta)^{n_0 - s_0 + n - s - 1} \tag{17}$$

故有 $$\overline{R} = E(\theta) = \frac{s + s_0}{n + n_0} \tag{18}$$

由于 $\sigma^2 = D(\theta) =$

$$\int_0^1 \theta^2 g(\theta | x_1, x_2, \cdots, x_n) \mathrm{d}\theta - [E(\theta)]^2$$

而 $\int_0^1 \theta^2 g(\theta | x_1, x_2, \cdots, x_n) \mathrm{d}\theta =$

$$\frac{(s + s_0 + 1)(s + s_0)}{(n + n_0 + 1)(n + n_0)}$$

所以 $$\sigma^2 = \frac{(n - s + n_0 - s_0)}{(n + n_0)(n + n_0 + 1)} \overline{R} \tag{19}$$

故有

$$R = \overline{R} \pm \sigma = \frac{s + s_0}{n + n_0} \pm \frac{1}{n + n_0} \sqrt{\frac{(s + s_0)(n - s - n_0 - s_0)}{n + n_0 + 1}} \tag{20}$$

为求得 n_0 和 s_0,可根据以往的故障信息,或相似产品的先验信息 n 和 $r(= n-s)$,利用以下两式求得

$$(s + 1)/(n + 2) = s_0/n_0 \tag{21}$$

$$\frac{(n + 1)(n - s + 1)}{(n + 3)(n + 2)^2} = \frac{s_0(n_0 - s_0)}{n_0^2(n_0 + 1)} \tag{22}$$

其中方程的左边是假设先验分布为均匀分布时求得后验分布的均值和方差;方程的右边为先验分布是参数为 n_0 和 s_0 的贝塔分布的均值和方差。

可靠度下限 R_L,可根据下式求得。

$$R_L = \frac{s + s_0}{(s + s_0) + (n_0 - s_0 + n - s) F_{1-\beta}[2(n_0 - s_0 + n - s), 2(s + s_0)]} \tag{23}$$

3 应用实例

用 35 台密封继电器进行可靠性试验,累计试验时间 $T = 2924423$ 次,失效数 $r = 9$,失效时间分别为:25021,28526,45859,53850,54770,58708,61140,63000,84513。现用贝叶斯法评估密封继电器的可靠性。

根据以前的试验数据[4],按传统的方法已经得出:失效率的点估计 λ_0(实际上是平均值)为 $1.39\%/10^4$,置信度为0.9时失效率上限估计 λ_u 为 $3.1\%/10^4$。

下面,我们分别计算 λ, $MTTF$ 和 $R(30000)$。

1) 失效率 λ

(a) 均值 $\overline{\lambda}$ 由于 $\lambda_u/\lambda_0 = 2.23$,根据式(7),用试探求得 $2r_0 + 2 = 8$,所以 $r_0 = 3$。由式(8)有 $T_0 = r_0/\lambda_0 = 2154839$。由式(4)有,$\overline{\lambda} = (r_0 + r)/(T_0 + T) = (3 + 9)/(2154839 + 2925423) = 2.36\%/10^4$

(b) 离差 σ

由式(5)得

$$\sigma^2 = \frac{\overline{\lambda}}{T_0 + T} = 0.465 \times 10^{-12}$$

所以 $\sigma = 0.68\%/10^4$。由式(6)有 $\lambda = \overline{\lambda} \pm \sigma = (1.68 \sim 3.04)\%/10^4$。

(c)失效率上限

$$\lambda_u = \frac{x^2(24, 0.9)}{2(T_0 + T)} = 3.27\ \%/10^2$$

2) 平均无故障工作时间 $\overline{MTTF}$

(a) 均值 $\overline{MTTF}$

由式(11) $\overline{MTTF} = \frac{5080262}{11} = 461842$。

(b) 离差 σ

由式(12)有 $\sigma = \frac{\overline{MTTF}}{\sqrt{r_0 + r - 1}} = 139251$。所以 $MTTF = \overline{MTTF} \pm \sigma = 322591 \sim 601093$。

3) 可靠度 R

(a) 均值 $\overline{R}$

查阅以前的试验数据得知:工作到 30000 次时,23 台中一台失效,即 $n = 23, s = 22$,于是由式(2)和式(22)有

$$\begin{cases} \frac{22+1}{23+3} = \frac{s_0}{n_0} \\ \frac{22+1}{23+3} \cdot \frac{23-22+1}{(23+2)^2} = \frac{s_0}{n_0^2} \cdot \frac{(n_0 - s_0)}{(n_0+1)} \end{cases}$$

联解上述方程得 $n_0 = 25, s_0 = 23$。

由式(18)有

$$\overline{R}(30000) = (s + s_0)/(n + n_0) = 0.933$$

(b) 离差 σ　由式(19)有

$$\sigma = \left[\frac{n - s + n_0 - s_0}{(n + n_0)(n + n_0 + 1)}\overline{R}\right]^{\frac{1}{2}} = 0.032。$$

由式(20)有 $R = \overline{R} \pm \sigma = 0.901 \sim 0.965$。

(c) 下限 R_L　由式(23)有

$$R_L = \frac{56}{56 + 4F_{0.9}(8, 12)} = \frac{56}{56 + 4 \times 1.727} = 0.89$$

4　结束语

用贝叶斯方法评估产品的可靠性指标,可以提高评估结果的置信度。在给定置信度下,可以减少当前批产品的试验样本个数。这种方法比传统的统计推断方法更经济有效,而且评估方法亦有计算简单的优点。所以,它有工程价值,但用贝叶斯法时,需要正确选择先验分布密度。因此,研究先验分布密度的选择方法是今后工作的重点。

参考文献:

[1] 夏洪,甘诚智.电视机可靠性指标的贝叶斯估计方法[J].南昌大学学报,2000,(4):92-95.

[2] 陆凯,陆淑兰,李凤玲.可靠性数学及其应用[M].吉林:吉林教育出版社,1987,142-148.

[3] 吴东昕,赵炳全,周绍杰.简化贝叶斯方法在核电厂设备可靠性研究中的应用[J].原子能科学技术,2000,(3):193-198.

[4] 焦景堂.航空机载设备可靠性维修性工程指南[M].1993,56-60.

收稿日期: 2002-07-04;　**修回日期**: 2002-09-23

作者简介:

潘茂庆(1965-),男,讲师,主要从事航空军械设备的研究和教学;

惠克翔(1973-),男,讲师,主要从事航空军械设备的研究和教学;

张有来(1964-),男,工程师,主要从事航空修理设备的生产和管理。

The application of Bayesian to evaluate relay reliability

PAN Mao-qing, HUI Ke-xiang, ZHANG You-lai, WANG Qi

(The First Aeronautical Institute of Air Force, Xinyang 464000, China)

Abstract: In this paper, the basic principle of Bayesian is introduced briefly at first, then Bayesian method to evaluate the invalidity, MTTF and credibility of relay is discussed more systematically, and the deciding method of prior distributing parameter is presented, at last it is elucidated with an example.

Key words: Bayesian method; relay; reliability evaluation

(上接第 18 页)

GA based detecting and calculating the compensating component of voltage for UPQC

YIN Bo[1], ZHENG Chu-tao[2], WANG Hui[1], WU Bing-chao[1]

(1. School of Electrical Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072, China; 2. Danzhao Power system Bureau, Nanhai 528200, China)

Abstract: With the development of the custom power technology, the research of UPQC (Unified Power Quality Conditioner) is booming. In order to minimize the energy of compensation, a theory of calculating compensating component of voltage is raised. Genetic algorithm (GA) is applied to calculate the optimized compensating component. The theory is proved by the result of simulation and calculation. By using this method, the stability of the DC voltage is improved and the cost of the main circuit is reduced.

Key words: UPQC; power quality; harmonic; genetic algorithm