

两尺度符号与运用于电力系统的小波的构造

胡海安, 向铁元, 谢锋, 张鹏

(武汉大学电气工程学院, 湖北 武汉 430072)

摘要: 立足于小波的构造, 比较深入地探讨了尺度函数和小波函数的两尺度符号与小波构造的紧密关系。从两尺度符号入手, 分析了它与 $L^2(R)$ 空间的直接和分解、对偶小波的结构、紧支撑小波的结构之间的内在联系。最后总结出了具有线性相位(或广义线性相位)的紧支撑双正交小波的构造方法, 并给出了实例。

关键词: 两尺度符号; 小波构造; 小波分析

中图分类号: TM71 文献标识码: A 文章编号: 1003-4897(2003)05-0009-05

1 引言

小波分析是在 Fourier 分析的基础上发展起来的, 作为时—频分析方法, 小波分析比 Fourier 分析有着许多本质的进步。主要是它具有自适应性和“聚焦性”^[1]。目前, 小波分析已越来越受到工程技术人员的重视, 并努力把这种先进的方法更好地运用到各自的领域中^[2]。小波在电力系统中的运用也是十分广泛的。针对电力系统里不同的问题, 对所选择的小波的正交性、紧支撑性的要求也不同。在此基础上, 电力系统中的问题对小波的线性相位性还有较高的要求。于是符合要求的小波基的构造无疑就成了一个关键。构造的方法总的来说还是多分辨分析, 由尺度函数到小波函数的过程。但是由于不同的应用实际, 选择每一个小波函数的过程是复杂的; 况且从小波函数的本身也很难看到小波函数以及滤波器的性质, 这为更好地运用小波分析造成了不便。然而两尺度符号却包含了尺度函数和小波函数的很多性质, 并且它还和滤波器有着紧密的联系。所以对两尺度符号的深入研究能从整体上来把握小波分析, 使小波分析方法能更好地应用于工程实际。

2 两尺度关系的引入

首先要从多分辨分析说起。如果一个函数 $\phi \in L^2(R)$, 满足作为尺度函数的条件, 并且还生成 $L^2(R)$ 的多分辨分析 $\{V_j\}, j \in Z$ 。这样空间 V_j 的补空间 W_j 就满足 $V_{j+1} = V_j + W_j$ 。象 $\{\phi(\cdot - k), k \in Z\}$ 是 V_0 空间的一个 Riesz 基一样, 如果函数 $\psi \in W_0$, 且 $\{\psi(\cdot - k), k \in Z\}$ 是空间 W_0 的一个基, 就称为小波函数。并且由多分辨分析知存在两个唯一的序列 $\{p_k\}, \{q_k\} \in l^2$ 使

$$\phi(x) = \sum_k p_k \phi(2x - k) \quad (1)$$

$$\psi(x) = \sum_k q_k \psi(2x - k) \quad (2)$$

对于所有的 $x \in R$ 成立。公式(1)与(2)分别称为尺度函数与小波的“两尺度关系”。对这两式作 Fourier 变换得

$$\hat{\phi}(z) = P(z) \hat{\phi}\left(\frac{z}{2}\right), \quad z = e^{-i\theta/2} \quad (3)$$

$$\hat{\psi}(z) = Q(z) \hat{\psi}\left(\frac{z}{2}\right), \quad z = e^{-i\theta/2} \quad (4)$$

其中
$$P(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k z^k \quad (5)$$

$$Q(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k z^k \quad (6)$$

分别称作尺度函数 ϕ 和小波函数 ψ 的两尺度符号。 $\{p_k\}, \{q_k\}$ 序列就构成了滤波器的冲激响应。在处理实际问题的时候, 一般更注意用有限和描述的两尺度关系公式(1)。也就是说相应的尺度函数是有紧支撑的。因为紧支撑尺度函数有助于构造有较小支撑的小波, 从而使小波重构算法中的重构序列就变得越短。我们还知道, 只要两尺度符号 $P(z)$ 不具有对称零点, 它所对应的尺度函数 ϕ 就具有紧支撑了。

3 两尺度符号与 $L^2(R)$ 空间的直接和分解

实际上用小波分析的方法来处理信号, 也就是设计滤波器来滤波的过程。因此滤波器冲激响应或尺度系数 $\{p_k\}$ 的选择是至关重要的。由于 $\phi(x)$ 和 $\{p_k\}$ 两者通过两尺度方程相互关联, 所以只要知道任何一方可以求出另一方。而现在已广泛认识到, 直接先找到尺度函数 $\phi(x)$, 再来确定满足双尺度方程的尺度系数 $\{p_k\}$ 往往并不容易。除非 $\phi(x)$ 是已知的具有某特殊性质的函数; 相反, 若 $\{p_k\}$ 已知

再来确定 $\phi(x)$ 反倒容易些^[3]。那么在 $\phi(x)$ 未知, 已知的尺度系数和小波系数 $\{p_k\}$ 、 $\{q_k\}$ 能否满足式 (1) 和式 (2) 的两尺度方程, 并且在小波的构造中是否能至少保证 V_0 与 W_0 满足等式:

$$V_0 \quad W_0 = \{0\} \text{ 与 } V_1 = V_0 + W_0, \text{ 即} \\ V_1 = V_0 + W_0 \quad (7)$$

这也就是一个 $L^2(\mathbb{R})$ 空间的直接和分解的问题。其实 V_1 的两个子空间之间的关系也依赖于两个两尺度符号 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 之间的关系。这涉及到一个由 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 构成的矩阵

$$M_{P,Q}(z) = \begin{bmatrix} P(z) & Q(z) \\ P(-z) & Q(-z) \end{bmatrix}$$

只要上面矩阵的行列式不为零, 直接和分解公式 (7) 就是成立的。

4 两尺度符号和对偶小波

对信号的小波分析, 实际上就是在小波基下将信号展开成小波级数, 也就是小波分解, 再对其分解结果进行分析的。对于每个小波 $\phi(x)$, 正交的或不正交, 生成任何 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 的小波级数表示

$$f(x) = \sum_{j,k} c_{j,k} \phi_{j,k}(x) \quad (8)$$

式中, $c_{j,k}$ 都是关于 $\phi(x)$ 的对偶 $\phi(x)$ 与 f 的内积。在上一节中说到的 $L^2(\mathbb{R})$ 空间的直接和分解只是小波分解的一个必要条件。因为通过直接和分解后得到的 $\phi(x)$ 即使生成 $L^2(\mathbb{R})$ 空间的一个 Riesz 基, 也可以不是一个小波^[4], 所以必须研究 $\phi(x)$ 的对偶

$\phi(x)$ 。而两尺度符号也为判断小波的对偶提供了比较简便的依据。

假设尺度函数 $\phi(x)$ 和它的对偶 $\phi(x)$ 所对应的两尺度符号分别为 $P(z)$ 和 $G^*(z)$; 小波函数

$\phi(x)$ 和它的对偶 $\phi(x)$ 所对应的两尺度符号为 $Q(z)$ 和 $H^*(z)$ 。如果等式

$$P(z)G(z) + P(-z)G(-z) = 1, |z| = 1 \quad (9)$$

成立, 其中 $G^*(z) = \overline{G(z)}$ 。那么两尺度符号 $P(z)$ 和 $G^*(z)$ 称为是彼此对偶的。在 $P(z)$ 和 $G^*(z)$ 满足了式 (9) 的前提下, 再按照下面的式子来选择 $Q(z)$ 和 $H(z)$, 即

$$\begin{cases} Q(z) = z^{-1}G(-z)K(z^2) \\ H(z) = zP(-z)K^{-1}(z^2) \end{cases} \quad (10)$$

其中, K 是一个 Laurent 多项式, 而在 $|z| = 1$ 上, $K(z) \neq 0, H^*(z) = \overline{H(z)}$, 那么由 $Q(z)$ 和 $H^*(z)$

决定的小波函数 $\phi(x)$ 和 $\phi(x)$ 就是对偶的。于是通过小波分解得的小波级数表示式 (8) 才是有意义的。

5 两尺度符号与紧支撑小波

紧支撑小波是现在用得比较多的一类小波, 通过对其两尺度符号的研究, 能更清楚地看到紧支撑小波的结构。它与小波的正交性和线性相位性是紧密联系的。

5.1 半正交小波的结构

由半正交小波的定义及它的对偶函数的表示方法, 半正交尺度函数 $\phi(x)$ 的对偶函数 $\phi(x)$ 可以用式

$$\hat{\phi}(z) = \frac{\hat{\phi}(z)}{|\hat{\phi}(z + 2^{-k})|^2} \quad (11)$$

给出。再引入关于 ϕ 的广义 Euler-Frobenius Laurent 多项式:

$$E(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k+y) \overline{\phi(y)} dy \right\} z^k = \left| \hat{\phi}\left(\frac{z}{2} + 2^{-k}\right) \right|^2 \quad (12)$$

其中 $z = e^{-i\omega/2}$, 在 $|z| = 1$ 上没有零点也没有极点。由式 (11) 得:

$$\hat{\phi}(z) = \frac{1}{E(z^2)} \hat{\phi}(z) = \frac{E(z)}{E(z^2)} P(z) \hat{\phi}\left(\frac{z}{2}\right) \quad (13)$$

于是尺度函数 ϕ 的对偶 ϕ 所对应的两尺度符号为:

$$G^*(z) = \frac{E(z)}{E(z^2)} P(z) \quad (14)$$

由式 (10)、(14) 并且取 $K(z) = zE(z)$ 可以得到小波函数 ϕ 及小波函数的对偶 ϕ 所对应的两尺度符号 $Q(z)$ 和 $H^*(z)$ 为:

$$\begin{cases} Q(z) = zE(-z)P(-z) \\ H(z) = z^{-1} \frac{P(-z)}{E(z^2)} \end{cases} \quad (15)$$

其中: $H^*(z) = \overline{H(z)}$

从式 (14)、(15) 可以看出: 如果 $P(z)$ 是一个有限和的级数, 即 $\{p_k\}$ 是有限的实值的两尺度序列。因为 $E(z)$ 此时是有紧支撑的, 所以 ϕ 及其相应的半正交小波 ϕ 具有紧支撑, 而 ϕ 和 ϕ 是实指数衰减的。

5.2 正交小波的结构

如果尺度函数 ϕ 是正交的, 即在 $\{\phi(\cdot - k) \mid k$

z 意义上是一个正交族。此时在 5.1 小节中引入的广义 Euler-Frobenius Laurent 多项式 $E(z)$ 就是常数 1 了。于是式(14)就变成了:

$$G^+(z) = P(z) \quad (16)$$

所以尺度函数是自对偶的,即 $\phi = \phi$ 。式(15)就变成了:

$$\begin{cases} Q(z) = -z \overline{P(-z)} \\ H(z) = -z^{-1} \overline{P(-z)} \end{cases} \quad (17)$$

其中: $H^+(z) = \overline{H(z)}$

分析式(16)和(17)可知:如果 $P(z)$ 是一个有限的级数,即 $\{p_k\}$ 是有限的实值的两尺度序列。那么 ϕ 及其对偶 ϕ 和相应的半正交小波 都是紧支撑的,而小波的对偶则是实指数衰减的。

5.3 线性相位的紧支撑小波

在小波分析中,为了减少失真,就要求滤波器具有线性相位或至少是广义线性相位。这就对小波函数提出了相应的要求。例如在 5.1 节关于半正交小波两尺度符号的讨论中,式(15)可以用来判断小波是否具有广义线性相位。因为 $E(z)$ 的有限序列是斜对称的,只要 $\{p_k\}$ 具有对称性, $Q(z)$ 的系数序列 $\{q_k\}$ 也就有对称性了。在 5.2 节中,由于小波是正交的,从所得到的式(17),进而可以得到 $q_k = (-1)^k \overline{p_{l-k}}$,即便 $\{p_k\}$ 具有对称性, $\{q_k\}$ 一般也不具有对称性。所以除了 Haar 函数外,正交紧支撑函数是不具有广义线性相位特性的。

由上面的启发可知,要构造具有广义线性相位的小波函数,就可以有两种选择方法。第一种方法是选择半正交小波,但它的对偶却没有紧支撑;第二种方法就是放弃正交性,代之以双正交小波来寻找具有广义线性相位的紧支撑 和 。

第二种方法是一种先构造紧支撑的具有广义线性相位的 ϕ ,再去求 的方法。因此在构造中首先应考虑的是 ϕ 和它的对偶 ϕ ,即它们的两尺度符号 $P(z)$ 和 $G^+(z)$ 要满足: $P(z)G(z) + P(-z)G(-z) = 1$ 。在此前提下,考虑 ϕ 的广义相位性,则 ϕ 的两尺度符号要满足: $P(z) = z^m \overline{P(z)}$, $|z| = 1$ 。再考虑 ϕ 也要具有广义线性相位,这就要重新为 ϕ 提供一个容许的两尺度符号 $G_1^+(z)$ 。如果令

$$G_1(z) = \frac{1}{2} \{ G(z) + z^{-m} G^+(z) \} \quad (18)$$

其中 $G_1^+(z) = \overline{G_1(z)}$, $G^+(z) = \overline{G(z)}$,那么就可以

得出结论:

$$\begin{cases} P(z)G_1(z) + P(-z)G_1(-z) = 1 \\ G_1^+(z) = z^m \overline{G_1^+(z)} \end{cases} \quad (19)$$

这个结论反映的就是两尺度符号 $G_1^+(z)$ 对应的函数与 ϕ 对偶,并且具有广义线性相位。这样,有了满足紧支撑和广义线性相位的两尺度符号 $P(z)$ 、 $G_1^+(z)$,再运用式(10)来选择 $Q(z)$ 和 $H^+(z)$ 就可以构造满足要求的小波函数。

6 紧支撑广义线性相位小波的构造及实例

在信号分析中一般需要线性相位的滤波器。由上面的分析可知,构造一个具有紧支撑广义线性相位的小波就要放弃小波的正交性。这也要从尺度函数 ϕ 和它的两尺度符号 $P(z)$ 入手。

当一个尺度函数具有广义线性相位时,它的两尺度符号就满足 $P(z) = z^m \overline{P(z)}$, $|z| = 1$ 。那么这个两尺度符号还能进一步写成:

$$P(e^{-i}) = e^{-im/2} \cos(l/2) S(\cos) \quad (20)$$

其中 S 是具有实系数的多项式,满足 $S(1) = 1$ 与 $S(-1) = 0$,并且 $(m-l)$ 是一个偶整数。而它的对偶符号 $G^+(z) = \overline{G(z)}$ 也具有同上面类似的形式:

$$G(e^{-i}) = e^{im/2} \cos(l/2) S(\cos) \quad (21)$$

其中 S 是满足 $S(1) = 1$ 的一个实多项式, $N = (l+l)/2$ 为一个正整数。再由式(9)去寻找 $S(\cos)$ 与 $S(\cos)$ 的关系可得:

$$S(\cos) S(\cos) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} \left(\sin \frac{\cdot}{2} \right)^k + \left(\sin \frac{\cdot}{2} \right)^N T_0(\cos) \quad (22)$$

其中 T_0 是一个奇多项式。当 $S(\cos)$ 与 $S(\cos)$ 都求出以后,实际上就是知道了 $P(z)$ 和 $G^+(z)$ 。进而就可求出满足要求的小波函数了。

m 阶 B 样条函数 $N_m(x)$ 在小波分析中是经常被用到的。因为 $N_m(x)$ 的 Fourier 变换是

$$\hat{N}_m(x) = \left[\frac{\sin(\cdot/2)}{/2} \right]^m e^{-im/2} \quad (23)$$

所以 $N_m(x)$ 是具有线性相位的。 $N_m(x)$ 的两尺度符号

$$P(z) = \left[\frac{1+z}{2} \right]^m = e^{-im/2} \left[\cos \frac{\cdot}{2} \right]^m \quad (24)$$

利用 m 阶 B 样条函数 $N_m(x)$ 能构造线性相位的紧支撑集对偶尺度函数和相应的紧支撑集双正交小波。下

面就以 m 阶 B 样条函数 $N_m(x)$ 为例来总结出构造的具体步骤:

- 1) 取自然数 m 和 l , 使 $m+l$ 为偶数;
- 2) 选尺度函数 $\phi(x) = N_m(x)$, 按照 m 阶 B 样条函数 $N_m(x)$ 的两尺度符号 $P(z)$ 得到相应的两尺度序列 $\{p_k\}$;
- 3) 有了 $P(z)$ 后, 应用式 (20)、(21)、(22) 求出 $G(e^{-i})$;
- 4) 利用 $G^*(z) = \overline{G(z)}$ 得到对偶尺度函数 ϕ 及相应的两尺度序列 $\{p_k\}$;
- 5) 由式 (10) 选择出适当的 Q 和 H , 就可以得到小波函数 及其对偶 所对应的两尺度序列 $\{q_k\}$ 和 $\{q_k\}$;

这样就可构造具有线性相位的紧支集对偶尺度函数, 对应的紧支集双正交小波, 及其相应的两对分解与重构 FIR 滤波器组 ($\{p_k\}, \{q_k\}$) 与 ($\{p_k\}, \{q_k\}$)。

例: 取 2 阶 B 样条函数 $N_2(x)$ 来构造紧支集双正交小波及其相应的滤波器。

由式 (24) 可得:

$$P(z) = \left(\frac{1+z}{2} \right)^2 = e^{-i} \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^2 \quad (25)$$

所以有 $p_0 = \frac{1}{4}, p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{4}$;

比较式 (25) 与 (20), 于是知道 $m=2, l=2, S$

1, 如果取 $l=2, T_0=0$, 由式 (21)、(22) 可得:

$$G(e^{-i}) = e^i \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^2 \left[1 + 2 \left(\sin \frac{\omega}{2} \right)^2 \right] \quad (26)$$

由 $z = e^{-i}$ 和欧拉公式可得:

$$G(z) = \frac{1}{8} (-z + 2 + 6z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3}) \quad (27)$$

由步骤 4) 可得:

$$G^*(z) = \frac{1}{8} (-z^{-1} + 2 + 6z + 2z^2 - z^3) \quad (28)$$

于是可以得到序列 $\{p_k\}$: $p_{-1} = -\frac{1}{8}$,

$p_0 = \frac{1}{4}, p_1 = \frac{3}{4}, p_2 = \frac{1}{4}, p_3 = -\frac{1}{8}$;

由此可以看出 ϕ 具有线性相位; 利用式 (10), 取 $K(z) = z^2$ 可得:

$$Q(z) = \frac{1}{8} (1 + 2z - 6z^2 + 2z^3 + z^4) \quad (29)$$

$$H^*(z) = \overline{H(z)} = \frac{1}{4} (z - 2z^2 + z^3) \quad (30)$$

从而得到 $\{q_k\}$ 和 $\{q_k\}$: $q_0 = \frac{1}{8}, q_1 = \frac{1}{4}$

$$q_2 = -\frac{3}{4}, q_3 = \frac{1}{4}, q_4 = \frac{1}{8}$$

$$q_1 = \frac{1}{4}, q_2 = -\frac{1}{2}, q_3 = \frac{1}{4}$$

这样就用 2 阶 B 样条函数 $N_2(x)$ 构造出了紧支集双正交小波及其相应的滤波器。并且它还具有线性相位。其实偶数阶的样条函数构造出的滤波器都是具有线性相位的, 而对于奇数阶则只具有广义的线性相位。

7 新构造小波在电力系统中的应用

输电线故障行波测距是当前电力系统的一个热门课题。以往使用的正交非线性相位的小波进行处理时, 在变换的各个尺度层上虽然能反映信号突变点的位置, 但对应的小波变换极大值点在各个尺度层上有位移表现, 这就是由于采用的小波不对称的原因造成的。接下来以上面例子中构造的小波和相应的滤波器来分析故障信号。首先通过仿真得到输电线故障信号为 S , 其波形为如图 1。

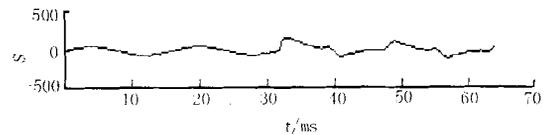


图 1 故障信号 S

Fig. 1 Fault signal S

对此故障信号, 在 Matlab 中用 wavelet-toolbox 里的函数对其进行 6 尺度的小波分析。经过小波分解与重构可以得到如图 2 各尺度的逼近。

可见在各个尺度的细节版本里, 基本上能看到信号畸变的时刻, 也基本消除了极大值点在各尺度层的位移现象。特别在 $d1$ 下, 已经能够分辨出故障发生的时刻了。这将为行波法故障测距提供依据。除此以外, 上述的构造方法还能很好地运用到电力系统通讯的数据压缩, 及电能质量分析等需要线性相位小波的应用中去。对于小波应用于电力系统的其他方面也有参考作用。

8 结论

本文通过对尺度函数和小波函数的两尺度符号的深入分析, 认识到了不同性质小波的结构特点。也进一步看到了两尺度符号与小波构造之间的内在

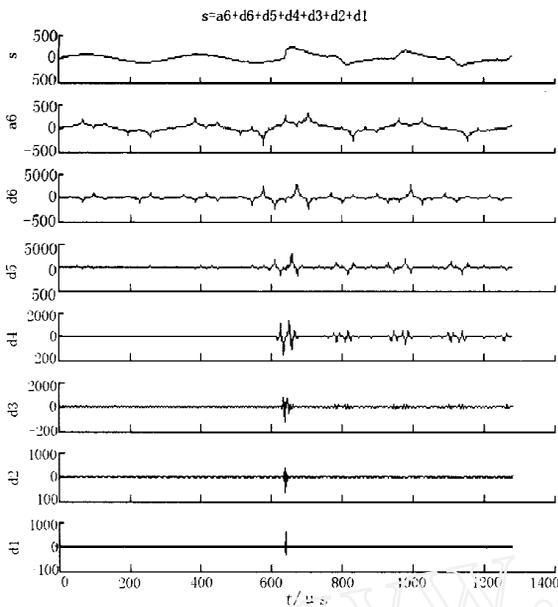


图2 故障信号的多尺度逼近

Fig. 2 Multi-scales approach of fault signal

联系。在此基础上,总结了具有线性相位的紧支撑双正交小波的构造方法。实例计算和仿真证明该方法具有较高实用性,可应用于电力系统的相关问题。

也可以作为高阶滤波器设计时,计算机算法的依据。将两尺度符号与小波构造结合的方法对电力系统其他不同性质的小波的构造也有很高的借鉴作用。

参考文献:

- [1] 李建平. 小波分析与信号处理—理论应用及软件实现[M]. 重庆:重庆出版社,1997.
- [2] 徐长发,李国宽. 实用小波分析[M]. 武汉:华中科技大学出版社,2001.
- [3] 张贤达,保铮. 非平稳信号分析处理[M]. 北京:国防工业出版社,1998.
- [4] 崔锦泰. 小波分析导论[M]. 西安:西安交通大学出版社,1995.

收稿日期: 2002-08-20; 修回日期: 2002-09-19

作者简介:

胡海安(1975-),男,硕士研究生,主要从事小波在电力系统中的应用研究;

向铁元(1953-),男,副教授,主要从事电力系统运行与控制,电力系统分析计算方面的研究;

谢锋(1972-),男,硕士研究生,主要从事电力系统运行与控制方面的研究。

Two-scale symbol and the construction of wavelet applied in power system

HU Hai-an, XIANG Tie-yuan, XIE Feng, ZHANG Peng

(Dept. of Electrical Engineering Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: Basing on the construction of wavelet, discuss the close relation between the scaling function and wavelet function's two-scale symbol and wavelet construction. The analyse begin with the two-scale symbol, then the immanent relation between two-scale symbol and the direct sum decomposition of $L^2(\mathbb{R})$ space; the structure of dual wavelet; the structure of compactly supported wavelet. Late present the method that how to construct the compactly supported biorthogonality wavelet with linear phase or generalizing linear phase, and take an example.

Key words: two-scale symbol; construction of wavelet; wavelet analysis

(上接第8页)

Research on transient voltage signals based protection criterion for transmission line

XIA Ming-chao, HUANG Yi-zhuang

(Department of Electrical Engineering, TsingHua University, Beijing 100084, China)

Abstract: A new high-speed protection criterion for high voltage transmission line based on the wavelet transform of transient voltage signals from the two ends of the line is presented. By comparing the Lipschitz exponent and time of the wavelet modulus maxima of voltages of both ends, in-zone faults and out-zone faults and switching operations can be distinguished, protection operates more reliably and can protect the whole line, and there is no strict request for synchronous sampling. Simulations are carried out using EMTP for testing the criterion, and there is the influences of fault locations and noises are discussed.

Key words: transient based protection; wavelet transform; lipschitz exponent; two-end protection