

# 电力系统次同步谐振中 Hopf 分岔现象的研究

罗成, 程时杰, 江全元

(华中科技大学电气与电子工程学院, 湖北 武汉 430074)

**摘要:** 针对 IEEE SSR 第一基准模型, 应用 Hopf 分岔理论, 分析了系统的分岔现象。结果表明, 随着串联补偿电容的增加, 电气振荡模式与相应的扭振模式的相交, 只意味着与扭振模式对应的 SSR 不稳定振荡最有可能发生, 但不意味着 Hopf 分岔和 SSR 的不稳定振荡一定发生。时域仿真表明 SSR 的不稳定振荡区域比特征值分析法所预测的不稳定振荡范围稍小。

**关键词:** 次同步谐振; 特征值分析; Hopf 分岔

**中图分类号:** TM712 **文献标识码:** A **文章编号:** 1003-4897(2002)05-0001-05

## 1 引言

电力系统次同步谐振<sup>[1]</sup> (Subsynchronous Resonance, 简称为 SSR) 是指汽轮机发电机组轴系振荡和发电机电气系统的电气振荡之间, 通过发电机转子气隙中电气转矩的相互耦合作用而形成的整个机网系统的共振行为。目前 SSR 的分析方法主要有频率扫描、特征值分析和数字时域仿真。

近几年来, 人们尝试用几何方法来研究诸如 SSR、电压稳定等电力系统动态过程中的非线性行为。文献[2-7]的研究结果表明, 电力系统中存在各种不同类型的分岔现象, 其中最常见的是 Hopf 分岔。在 SSR 研究领域, 文献[2]首次研究了扭矩振荡 (Torsional Oscillation) 中出现的 Hopf 分岔现象, 通过时域仿真和特征值分析法研究了 Hopf 分岔现象的产生和扭矩振荡的不稳定域; 文献[3-7]运用分岔理论研究了单机无穷大系统简化模型中存在的 Hopf 分岔现象。国内近年来也开展了关于 SSR 中 Hopf 分岔现象的研究工作, 文献[8]在非线性的模态理论基础上, 通过建立非线性模态与 Hopf 分岔的联系, 提出了一种新的 Hopf 分岔的分析方法, 并将其推广应用于一个简化的 SSR 模型的 Hopf 分岔的分析。

本文针对单机无穷大系统, 通过详细的建模, 研究了 IEEE SSR 第一基准模型的 Hopf 分岔现象。通过时域仿真验证并与分析结果作了比较。

## 2 Hopf 分岔的基本理论<sup>[9]</sup>

通常将动态系统从稳定的平衡状态发展成为极限环的分岔现象称为 Hopf 分岔。

对于非线性常微分方程:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(y, \mu), \\ f: R^n \times R &\rightarrow R^n, n \geq 2, f \in C \end{aligned} \quad (1)$$

假若:

(1) 若  $\mu_0$  处存在一个平衡点  $y_0 \in R^n$ , 即  $f(y_0, \mu_0) = 0$  和  $D_y f(y_0, \mu_0) \in A_{n \times n}$  是可逆的。根据隐函数定理, 在  $\mu_0$  的邻域内存在一条通过平衡点  $y_0$  的曲线  $y = y(\mu)$ , 且  $y(\mu_0) = y_0$ , 不失一般性, 可移动  $\mu$  轴使  $f(0, \mu) = 0$ ;

(2)  $A(\mu) = D_y f(0, \mu)$  有一对共轭复特征根  $(\mu) \pm i(\mu)$ , 当  $\mu = \mu_0$  时满足:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0 > 0$$

(3) 横截条件  $f'(0) = d/d\mu > 0$  满足。 ( $\mu_0$ ) 0 意味着  $(\mu) \pm i(\mu)$  当  $\mu$  通过  $\mu_0$  时横穿虚轴。

(4)  $A(\mu_0)$  其余的  $n-2$  个特征值都有负实部。

则系统(1)将会在  $(y_0, \mu_0)$  点产生极限环, 即 Hopf 分岔现象, 且振荡的周期为:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (2)$$

## 3 电力系统模型

考虑图 1 所示的具有串联电容补偿的电力系统。下面给出计及电磁暂态过程和机械暂态过程情况下各元件的动态方程描述。为统一起见, 除时间  $t$  以秒为单位外, 其他变量均采用标么值表示, 其具体含义见文献[10]。

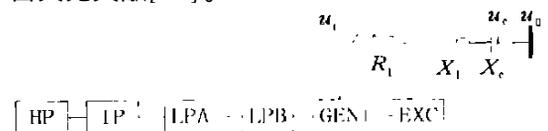


图 1 具有串联电容补偿的单机无穷大系统

3.1 质量弹簧系统的基本方程

$$\begin{bmatrix} T_{J1} p & 1 \\ T_{J2} p & 2 \\ T_{J3} p & 3 \\ T_{J4} p & 4 \\ T_{J5} p & 5 \\ T_{J6} p & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-1 \\ 2-1 \\ 3-1 \\ 4-1 \\ 5-1 \\ 6-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_{12} & K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{12} & -K_{12} & -K_{23} & K_{23} & 0 & 0 \\ 0 & K_{23} & -K_{23} & -K_{34} & K_{34} & 0 \\ 0 & 0 & K_{34} & -K_{34} & -K_{45} & K_{45} \\ 0 & 0 & 0 & K_{45} & -K_{45} & -K_{56} & K_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{56} & -K_{56} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ -T_e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$p_k = b(k-1), k=1, 2, \dots, 6$

其中  $s = \dots, s =$

3.2 透平机和调速器系统

$$\left. \begin{aligned} pT_1 &= \frac{F_{HP}}{T_{CH}} \mu - \frac{1}{T_{CH}} T_1 \\ pT_2 &= \frac{F_{IP}}{F_{HP} T_{RH}} T_1 - \frac{1}{T_{RH}} T_2 \\ pT_3 &= \frac{F_{LPA}}{F_{IP} T_{CO}} T_2 - \frac{1}{T_{CO}} T_3 \\ pT_4 &= \frac{F_{LFB}}{F_{LPA}} T_3 \\ p &= \frac{K_G}{T_{SR}} (u_{ref} - u_t) - \frac{1}{T_{SR}} \\ p\mu &= \frac{1}{T_{SM}} - \frac{1}{T_{SR}} \mu \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

3.3 同步发电机

$$\begin{bmatrix} d \\ f \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_d & X_{ad} & X_{ad} \\ X_{ad} & X_f & X_{ad} \\ X_{ad} & X_{ad} & X_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i_d \\ i_f \\ i_D \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} q \\ g \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_q & X_{aq} & X_{aq} \\ X_{aq} & X_g & X_{aq} \\ X_{aq} & X_{aq} & X_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i_q \\ i_g \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\frac{1}{b} \begin{bmatrix} p & d \\ p & f \\ p & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_d \\ u_f \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_a & 0 & 0 \\ 0 & R_f & 0 \\ 0 & 0 & R_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i_d \\ i_f \\ i_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\frac{1}{b} \begin{bmatrix} p & q \\ p & g \\ p & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_a & 0 & 0 \\ 0 & R_g & 0 \\ 0 & 0 & R_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i_q \\ i_g \\ i_Q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i_d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$T_e = \frac{d i_q - q i_d}{\dots}$  (12)

3.4 励磁系统

$$\left. \begin{aligned} pu_R &= \frac{K_A}{T_A} (u_{ref} - u_t) - \frac{1}{T_A} u_R \\ pE_{fq} &= \frac{1}{T_E} u_R - \frac{1}{T_E} E_{fq} \\ u_t^2 &= u_d^2 + u_q^2 \\ E_{fq} &= \frac{X_{ad}}{R_f} u_f \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

3.5 发电机外电路方程

$u_d = R_1 i_d - X_1 i_q + \frac{X_1}{b} p i_d + u_{cd} + u_{0d}$  (14)

$u_q = R_1 i_q + X_1 i_d + \frac{X_1}{b} p i_q + u_{cq} + u_{0q}$  (15)

$pu_{cd} = b(X_c i_d + u_{cq})$  (16)

$pu_{cq} = b(X_c i_q - u_{cd})$  (17)

方程(3)~(17)组成了一个包含 11 个代数方程和 28 个微分方程的系统,它描述了具有串联电容补偿同时包括轴系动态过程的单机无穷大电力系统的动态行为。消去代数方程的中间变量  $i_d, i_f, i_D, i_q, i_g, Q, u_f, u_t, u_d, u_q, T_e$ ,可以得到一个一阶非线性状态微分方程组,其状态变量为:

$X = [ \dots, T_1, T_2, T_3, T_4, \dots, \mu, i_d, i_f, i_D, i_q, i_g, i_Q, u_R, E_{fq}, u_{cd}, u_{cq} ]$  (18)

4 Hbpf 分岔分析

以 IEEE SSR 工作组 IEEE SSR 第一基准模型系统为研究对象。系统参数和接线方式如图 2 所示。

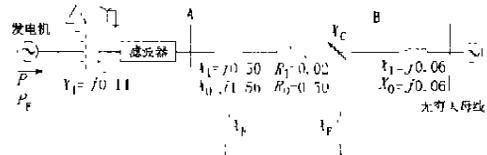


图 2 IEEE SSR 第一基准模型

图中的参数是以发电机额定容量为基准的标么值,工频为60Hz。由多质量块模拟轴系的发电机(其额定容量为892.4MVA)经升压变压器接入500kV系统,发电机轴系由6个质量块组成,分别模拟汽轮机高压缸HP、中压缸IP、低压缸A、低压缸B、发电机GEN和励磁机EXC的转子部分,如图1所示。

该系统存在6个扭振模式,其中5个扭振模式对应于轴系质量块之间的扭振,固有频率分别是15.71Hz、20.21Hz、25.55Hz、32.28Hz、47.46Hz,依次与扭振模式1到模式5(TM1~TM5)对应。另一模式TM0称为共模,对应于将整个轴系作为一个刚体对待时,它相对于电力系统的低频振荡模式,随着串联电容补偿度的增加,该振荡模式的频率在1.22~2.32Hz之间变化。多质量块轴系发电机模型的详细参数见文[11]。

#### 4.1 特征值分析结果

利用第3节分析的结果,从而可以建立整个系统的模型。应用特征值分析法将系统在平衡点线性化,得到系统的线性化微分方程,通过其雅克比矩阵J可以求出系统的28个特征值。每一实特征值或每对共轭复特征值都可以与系统的一个部件相联系。可以得出当串联电容补偿度 $\mu$ 变化时,与发电机轴系扭振模式TM1~TM5相对应的特征值实部和虚部的变化情况,如图3所示。其中SEM代表次同步电气振荡模式(Subsynchronous Electrical Mode,简称SEM)。

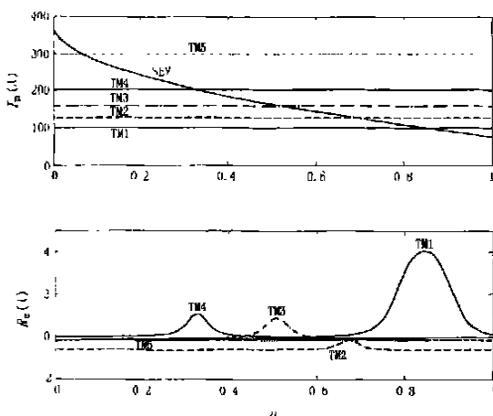


图3 串联补偿度 $\mu$ 变化时特征值实部和虚部的变化

从图3可知,次同步电气振荡模式SEM与轴系扭振模式TM5在 $\mu = 0.0681$ 时相交于298.18rad/sec(47.46Hz)处。它使特征值在复平面上向虚轴靠拢,但并未能穿过虚轴。由Hopf分岔理论可知,此时模式TM5的振荡仍然稳定,SSR不会发生。

随着 $\mu$ 的继续增加,SEM频率逐渐下降,它将逐渐远离模式TM5,向模式TM4靠拢。此时与模式TM5对应的特征值在复平面上远离虚轴向左移动,表明电气模式对TM5的影响变得不明显。另一方面,电气模式对TM4的影响不断增加,与TM4对应的特征值在复平面上横穿虚轴,进入右半复平面,此时Hopf分岔发生。图4给出了串联补偿度 $\mu$ 变化时与模式TM4对应的特征值实部的变化情况。由图可知,与模式TM4对应的Hopf分岔现象将在A点( $\mu = 0.2056$ )和B点( $\mu = 0.4507$ )发生。

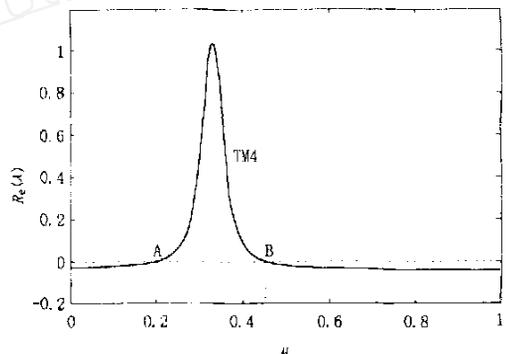


图4 串联补偿度 $\mu$ 变化时与模式TM4对应的特征值实部的变化

值得指出的是,当 $\mu = 0.3296$ 时,模式SEM与模式TM4在203rad/sec(32.31Hz)处相交,它与模式TM4的自然扭振频率32.28Hz差别不大。文献[6]指出Hopf分岔发生在电气模式与相应的扭振模式的相交点。本文的分析进一步表明在计及励磁机、调速器的情况下,电气模式与扭振模式的相交只意味着,此时与此扭振模式对应的特征值的实部具有最大值,即SSR不稳定振荡最有可能发生,并不表明SSR的不稳定振荡一定会发生,如图3所示。

用类似的方法,可以分析在模式TM1、TM3上的Hopf分岔和SSR现象。

#### 4.2 Hopf分岔现象仿真分析

以扭振模式TM4为例,利用EMTDC软件仿真了在不同串联补偿度情况下系统小扰动后的动态响应过程。

图5是在图4中A点附近系统产生小扰动后低压缸B段转子的转速变化曲线。图5(d)中的波形是图5(c)中部分波形的放大。通过对在图4中A点附近的各个串联补偿度情况下进行相同的仿真,从而可以通过分析仿真结果中转子转速变化的趋势(增加或衰减)来判断Hopf分岔是否发生。从时域仿真结果可知,Hopf分岔发生在 $\mu = 0.225$ 处,对应

的振荡频率为32.26Hz。

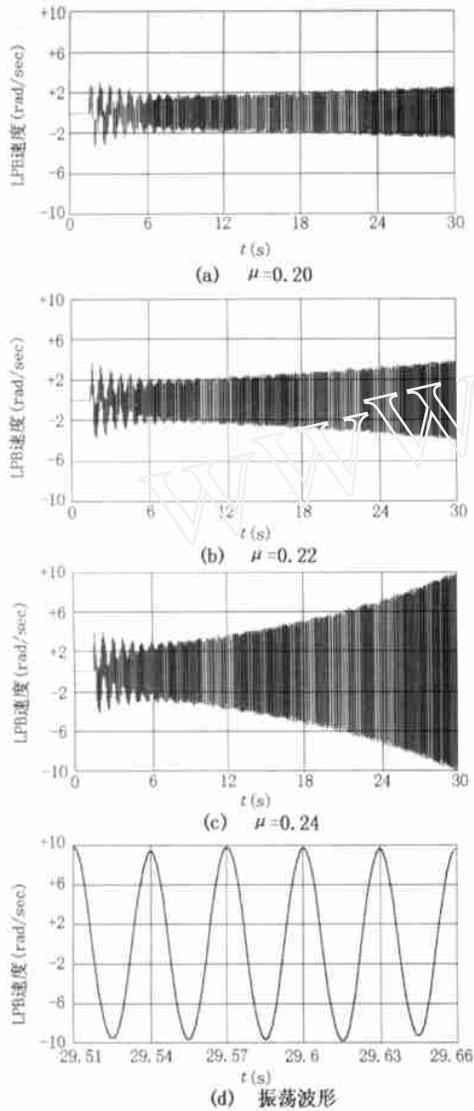


图5 不同串联补偿度时图4中A点系统产生小扰动后的系统响应

图6是在图4中B点附近小扰动后低压缸B段转子的转速变化曲线。同样地,图6(d)中的振荡波形是图6(c)中部分波形的放大。类似的,可知此时Hopf分岔发生在 $\mu = 0.425$ 处,对应的振荡周期也为32.26Hz。

注意到对于模式TM4而言,时域仿真表明,发生SSR不稳定振荡的区域为 $\mu [0.225, 0.425]$ 。比特征值分析法预测的范围 $[0.2056, 0.4507]$ 稍小。对其他模式下的时域仿真也有相同的结论,与文[2]、[5]的结果一致。这可能是因为Hopf分岔发生后,由于系统中存在非线性,导致存在幅值较小的稳定极限环,因而限制了系统的不稳定域。

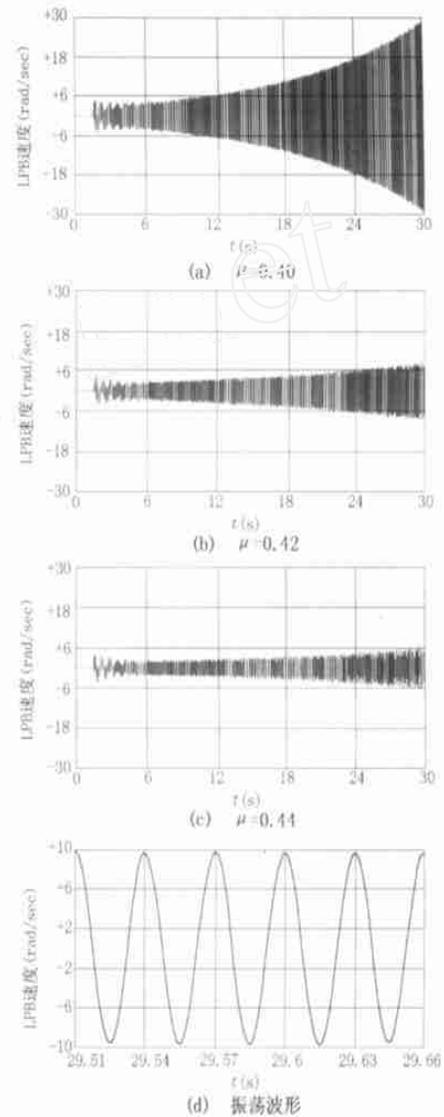


图6 不同串联补偿度时图4中B点系统产生小扰动后的系统响应

## 5 结论

在建立的详细的含有串联电容补偿和轴系动态过程的单机无穷大电力系统模型的基础上,通过特征值分析法分析了系统的Hopf分岔现象。分析表明,在串补电容条件下电力系统的SSR现象可以通过Hopf分岔理论解释。同时发现,电气振荡模式与相应的扭振模式的相交并不意味着Hopf分岔和SSR的不稳定振荡的发生。时域仿真也表明SSR的不稳定振荡区域比特征值分析法所预测的不稳定振荡范围稍小。

### 参考文献:

- [1] IEEE Committee Report by Subsynchronous Resonance Work

- ing Group of the System Dynamic Performance Subcommittee. Reader's Guide to Subsynchronous Resonance [R]. IEEE Transactions on Power Systems, 1992, 7(1): 150 ~ 157
- [2] Irvani M R, Semlyen A. Hopf Bifurcations in Torsional Dynamics [J]. IEEE Transactions on Power Systems, February 1992, 7(1): 28 ~ 36.
- [3] Zhu W, Mohler R R, Spee R. Hopf Bifurcation Analysis for an Electric Power System Experiencing Subsynchronous Resonance [C]. Decision and Control, Proceedings of the 33rd IEEE Conference on, 1994, 1: 613 ~ 614.
- [4] Zhu W. EMTP Simulation Evidence of Hopf Bifurcations in a Single-Machine Infinite-Bus Power System [C]. Control Applications, Proceedings of the 4th IEEE Conference on, 1995: 833 ~ 834.
- [5] Zhu W, Mohler R R, Spee R, et al. Hopf Bifurcations in a SMIB System with SSR [J]. IEEE Transactions on Power Systems, August 1996, 11(3): 1579 ~ 1584.
- [6] Nayfeh A H, Harb A M, Chin C-M, et al. Application of Bifurcation Theory to Subsynchronous Resonance in Power Systems [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1998, 8(1): 157 ~ 172.
- [7] Yasunori Mitani, Kichiro Tsuji, Matthew Varghese, et al. Bifurcations Associated with Subsynchronous Resonance [J]. IEEE Transactions on Power Systems, February 1998, 13(1): 139 ~ 144.
- [8] 傅卫平,徐健学,张新华.应用非线性模态方法分析机电耦合次同步扭振系统的Hopf分岔[J].中国电机工程学报,May 1997,17(3):175 ~ 178.
- [9] Seydel R. From Bifurcation to Chaos [M]. Elsevier Science Publishing Co., New York, 1988.
- [10] Yao-nan Yu. Electric Power System [M]. Academic Press, New York, 1983.
- [11] IEEE Subsynchronous Resonance Task Force of the Dynamic System Performance Working Group, Power System Engineering Committee. First Benchmark Model for Computer Simulation of Subsynchronous Resonance [J]. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, September/October 1977, PAS-96(5): 1565 ~ 1572.

收稿日期: 2001-12-30; 改回日期: 2002-02-25

作者简介: 罗成(1979-),男,硕士,主要研究方向为电力系统次同步谐振;程时杰(1945-),教授,博士生导师,主要研究方向为电力系统稳定性分析及其控制、人工智能在电力系统中的应用和低压电力网载波通信;江全元(1975-),男,博士,主要研究方向为直流输电、智能控制和电力系统稳定性。

### Hopf bifurcation analysis in power system with SSR

LUO Cheng, CHENG Shi-jie, JIANG Quan-yuan

(Huazhong University of Science & Technology, Wuhan 430074, China)

**Abstract:** A bifurcation analysis is used to investigate the stability of SSR for the IEEE first benchmark model. The results show that, as the compensation level increases, the system will lose its stability once a pair of complex conjugate eigenvalues of the jacobian matrix crosses the imaginary axes from the left to the right half of the complex plane. This corresponds to a Hopf bifurcation. The most significant contribution of this paper is that the subsynchronous electrical mode crosses with the torsional modes will most probably but not necessary induce the occurrence of unstable SSR. Time domain simulation results show that the region of unstable SSR is smaller than that determined by the eigenvalue analysis.

**Keywords:** SSR; eigenvalue analysis; Hopf bifurcation

## “工控机应用技术及可靠性研讨会”通知

由中国电工技术学会可靠性研究会保护及自动化分会、中国电器工业协会继电保护及自动设备分会和全国量度继电器和保护设备标准化技术委员会主办,许继亿万物流公司、许继集团电测室和《继电器》杂志社联合承办的“工控机应用技术及可靠性研讨会”将于2002年6月16日~6月18日在河南省许昌市召开。会议旨在帮助工控机生产厂家、控制与自动化设备制造厂和使用者(最终用户)更好地了解 and 掌握工控技术的使用,提高各单位的服务质量和产品质量,改善行业的质量水平,使工控机生产厂家能更好地了解用户需求,以求形成良性循环。欢迎相关单位和个人报名参加本次研讨会。

会议内容如下:工控机技术国内外发展的现状与应用技术;最新工控技术及新产品介绍;工控机应用技术的可靠性研究;工控机维修技术;工控机使用中存在的问题。

联系人:张利蕊 电话:0374-3212254 传真:0374-3360297 E-mail: relay@public2.zz.ha.cn

王伟红 电话:0374-3212905