NURBS 及其应用

姬晓天　许昌继电器研究所　(461000)

【摘要】 本文给出了 NURBS(非均匀有理 B 样条) 的概要介绍及其在继电保护行业中的相关应用。

【关键词】 B 样条　非均匀有理 B 样条　样条基函数　曲线拟合

NURBS 是英文 Non - Uniform Rational B - Spline(即非均匀有理 B 样条) 的缩写。所谓非均匀是指其节点参数沿参数轴的分布是不等距的。有理,是指其控制曲线上的权因子 Wi 可以取不同的值。

NURBS 是 CAGD(计算机辅助几何设计) 的研究方向之一,是一种先进的参数化曲线、曲面造型方法,主要应用于 CAD/ CAM 及计算机动画等方面。尽管 NURBS 难于理解,计算量大,但由于其自身的诸多特性,近年来 NURBS 有了较快的发展和广泛的应用。众多的国际标准(如 STEP *、IGES *、PHIGS *、OpenGL * 等) 和优秀的 CAD 系统(如 MicroStation) 以及三维动画制作软件(如 Alias Power Animation),均对 NURBS 提供支持。

NURBS 技术正得到越来越广泛的应用,这主要是由它自身所具备的优良特性所决定的,如:

(1) 对标准的解析形状(如圆锥曲线、二次曲面、回转面等) 和自由曲线、曲面提供了统一的数学表示,无论是解析形状还是自由格式的形状均有统一的表示参数,便于工程数据库的存取和应用。

(2) 可通过控制点和权因子的修改来灵活地改变形状,具有局部修改的性质。

(3) 对插入节点、修改、分割、几何插值等的处理工具比较有力。

(4) 具有透视变换和仿射变换的不变性。

(5) 囊括了现有的其他性能优良的曲线、曲面造型方法,如非有理 B 样条、有理及非有理 Bezier 曲线、曲面均是 NURBS 的特例表示。

迄今为止,还没有出现象非均匀有理 B 样条方法那样具有统一、通用、有效的标准算法及强有力的配套技术。

1　B 样条基函数

B 样条基函数是构造 B 样条曲线、曲面的基础。其递归定义公式:

取 t_0、t_1 ……t_{n+k+1} 一共 $n+k+1$ 个节点组成的节点向量 $T = \{t_0、t_1 \cdots\cdots t_{n+k}\}$

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0 & t \text{ 为其它} \end{cases}$$

$$N_{i,1}(t) = \frac{(t - t_i) N_{i,k-1}(t)}{t_{i+k-1} - t_i} + \frac{(t_{i+k} - t) N_{i+1,k-1}(t)}{t_{i+k} - t_{i+1}}$$

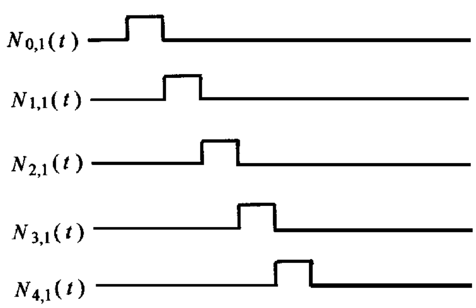

图 1

其中分式如为 $\frac{0}{0}$ 型,则值为 0。

高阶基函数用低一阶的基函数进行线性组合而得到。

* IGES ——基本图形转换规范
PHIGS ——程序员层次交互式图形系统
OpenGL ——开放式图形库
STEP ——产品数据转换规范

1998 —04 —29 收稿

一般情况下,三次B样条函数应用最为广泛,故这里只给出到三次B样条基函数的定义及函数图形。

(1) 一阶基函数

$$N_{i,1}(t)\ \text{是英}\begin{cases}1 & t\in[t_i,t_{i+1}]\\ 0 & t\ \text{为其它}\end{cases}$$

(2) 二阶基函数

$$N_{i,2}(t)=\frac{(t-t_i)N_{i,1}(t)}{t_{i+1}-t_i}+\frac{(t_{i+2}-t)N_{i+1,1}(t)}{t_{i+2}-t_{i+1}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} & t\in[t_i,t_{i+1}]\\ \dfrac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}} & t\in[t_{i+1},t_{i+2}]\\ 0 & t\ \text{为其它}\end{cases}$$

$$N_{1,3}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(t-1)^2 & t\in[1,2]\\ -t^2+5t-\dfrac{11}{2} & t\in[2,3]\\ \dfrac{1}{2}(4-t)^2 & t\in[3,4]\\ 0 & t\ \text{为其它}\end{cases}$$

$$N_{2,3}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(t-2)^2 & t\in[2,3]\\ -t^2+7t-\dfrac{23}{2} & t\in[3,4]\\ \dfrac{1}{2}(5-t)^2 & t\in[4,5]\\ 0 & t\ \text{为其它}\end{cases}$$

$N_{0,3}, N_{1,3}, N_{2,3}$ 画在一起的图形为图2所示

2.3 三阶基函数

$$N_{i,3}(t)=\frac{(t-t_i)N_{i,2}(t)}{t_{i+2}-t_i}+\frac{t_{i+3}-t)N_{i+1,2}(t)}{t_{i+3}-t_{i+1}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(t-t_i)^2}{(t_{i+2}-t_i)(t_{i+1}-t_i)} & t\in[t_i,t_{i+1}]\\ \dfrac{(t-t_i)(t_{i+2}-t)}{(t_{i+2}-t_i)(t_{i+2}-t_{i+1})}+\dfrac{(t_{i+3}-t)(t-t_{i+1})}{(t_{i+3}-t_{i+1})(t_{i+2}-t_{i+1})} & t\in[t_{i+1},t_{i+2}]\\ \dfrac{(t_{i+3}-t)^2}{(t_{i+3}-t_{i+1})(t_{i+3}-t_{i+2})} & t\in[t_{i+2},t_{i+3}]\\ 0 & t\ \text{为其它}\end{cases}$$

2 B样条曲线、曲面

2.1 B样条曲线的定义

已知 $n+1$ 个控制顶点 P_0、P_1、P_2 ……P_n,借助于基函数 $N_{i,k}(t)$ 可以定义一条 K 阶($K-1$ 次)B样条曲线:

$$C(t)=\sum_{i=0}^{n}N_{i,k}(t)\cdot P_i\qquad t\in[t_{k-1},t_{n+1}]$$

2.2 B样条曲面

B样条曲面定义如下:

给定 $(m+1)\times(n+1)$ 个空间网格点列 $P_{ij}(i=0,1,\cdots\cdots,m;j=0,1,\cdots\cdots,n)$,则 $k\times r$ 阶B样条曲面定义如图3:

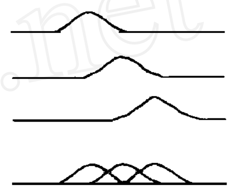

图2

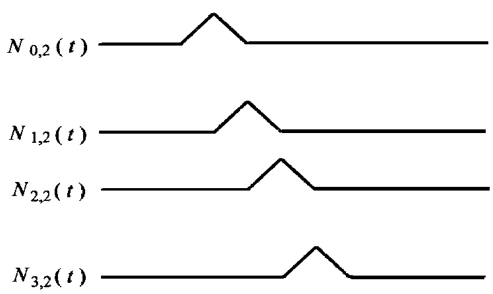

图3

令$\{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\} = \{0,1,2,3,4,5\}$,且 $i = 0$ 时,则 $N_{0,3}(t)$ 为如下(变量 t 省略,下同)

$$N_{0,3}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & t \in [0,1] \\ -t^2 + 3t - \frac{3}{2} & t \in [1,2] \\ \frac{1}{2}(3-t)^2 & t \in [2,3] \\ 0 & t \text{ 为其它} \end{cases}$$

同理:

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} P_{i,j} \cdot N_{i,k}(u) \cdot N_{j,r}(v)$$

$$u \in [t_{k-1}, t_{m+1}], v \in [s_{r-1}, s_{n+1}]$$

式中 $N_{i,k}(u)$ 和 $N_{j,r}(v)$ 是 k 阶、r 阶基函数,由 $P_{i,j}$ 组成的空间网格称为B样条曲面的特征网格,其中取 $t_0, t_1, \cdots\cdots, t_{m+k+1}$ 组成节点向量 T,$s_0, s_1, \cdots\cdots, s_{m+k+1}$ 组成节点向量 S。

3　NURBS曲线曲面

3.1　NURBS曲线定义

一条 K 阶NURBS曲线可以表示为一分段有理多项式函数:

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} W_i P_i N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^{n} W_i N_{i,k}(u)}$$

式中　$W_i (i = 0,1, \cdots\cdots, n)$ 为权因子

$P_i (i = 0,1, \cdots\cdots, n)$ 为特征多边形位置矢量

$N_{i,k}(u)$ 为 K 阶B样条基函数

节点向量中节点数为 $n + k + 1$ 个,节点向量为:

$$\{t_0, \cdots t_{k-1}, t_k, \cdots t_n, t_{n+1}, \cdots, t_{n+k}\}$$

3.2　NURBS曲面的定义

由双参数变量分段有理多项式定义的NURBS曲面是:

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} W_{i,j} \cdot P_{i,j} \cdot N_{i,k}(u) \cdot N_{j,r}(v) \Big/ \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} W_{i,j} \cdot N_{i,k}(u) \cdot N_{j,r}(v)$$

式中 $P_{i,j}$ 为矩形域上特征网格控制点列,$W_{i,j}$ 是相应控制点的权因子,$N_{i,k}(u)$ 及 $N_{j,r}(v)$ 是 k 阶、r 阶B样条函数,节点向量 $S = \{s_0, s_1, \cdots\cdots, s_{m+k+1}\}$, $T = \{t_0, t_1, \cdots\cdots, t_{n+r+1}\}$

4　NURBS在继电保护行业中的应用

作为计算机辅助设计的一项强有力的先进技术,NURBS有着较为广泛的应用。具体到继电保护行业,由于该行业涉及的基本上是二维数据,所以NURBS的应用主要是曲线拟合。应用NURBS作曲线拟合,可以得到精确的结果,改善当前所用方法误差较大的状况。

具体就是,对于经采样所得的离散数据点,如电流、电压、功率等,运用NURBS反算算法,来进行曲线拟合。

即将这些采样点作为空间型值点 $Q_i (i = 0,1,2, \cdots, n)$,配合适当的权 W_i,反算出所求的拟合曲线的控制顶点 $P_j (j = 0,1,2, \cdots, n+1)$ 和权 W_i^*,再给出相应的节点矢量$\{t_i\}$。我们知道,一旦节点矢量$\{t_i\}$,控制顶点 P_j,权 W_i^* 三者均已知后,就可计算求得所要的NURBS曲线。

参考文献

1　孙家广、杨长贵. 计算机图形学. 清华大学出版社,1995

2　施法中. 计算机辅助几何设计和NURBS. 北京航天大学出版社,1994

3　Les Piegel, Wayne Tiller. The NURBS Book Springer,2nd Edition. 1998

姬晓天,女,1970年生,硕士研究生,主要研究方向为计算机应用与软件设计。

NURBS AND ITS APPLICATION

Ji Xiaotian (Xuchang Relay Research Intitute, Henan, 461000)

Abstract　The introduction to NURBS(Non - Uniform Rational B - Spline) and its application in relaying protection is given in this paper.

Keywords　B - spline　NURBS　Spline base function　Curve fit