余弦算法

郭光荣　重庆电力高等专科学校　(400053)

【摘要】 提出一种能很好抑制幅值衰减的直流分量的余弦算法。仿真结果表明:这种算法计算基波和 n 次谐波幅值有很高的精度。

【关键词】 余弦算法　傅氏算法　幅度衰减　直流分量

引言

在微机保护的算法中傅氏算法得到广泛的运用[2],其主要原因在于算法本身具有滤波作用。但由于该算法是建立在假定输入信号是周期函数,可以分解为整倍数频率的分量之和,其中包括幅值恒定的直流分量。但由于电力系统实际的输入信号中的非周期分量包含的是衰减的直流分量,当计算所需的基频(或其他倍频)分量的幅值时不可避免地带来误差。为减小误差提出许多校正的傅氏算法,效果都不太理想[1]。目前大多采用先进行一次差分滤波后再进行傅氏变换的方法,当时间常数较小时也不太理想。本文提出的余弦算法能很好解决这一长期困扰我们的难题。

1　余弦算法的基本原理

为说明余弦算法抑制幅值衰减的直流分量的效果比目前采用的又计算正弦又计算余弦的傅氏算法好,首先分析傅氏算法受其影响的因素。

1.1　衰减直流分量对 n 次谐波($n = 1, 2, \cdots\cdots$)幅值计算精度的影响因素。

设 a_n、b_n 为各次谐波的正弦项和余弦项幅值,当采用傅氏算法的矩形法可近似求出:

$$a_n = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} X_{(k)} \sin\left(n\frac{2k\pi}{N}\right) \tag{1}$$

$$b_n = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} X_{(k)} \cos\left(n\frac{2k\pi}{N}\right) \tag{2}$$

其中 $X_{(k)}$ 为被采样信号 $X_{(t)}$ 的 k 点采样值。

众所周知,傅氏算法不受纯直流和整次谐波($n \geq 2$)的影响[3],但受衰减的直流分量的影响。

设 $X_{(t)} = A e^{-\frac{t}{\tau}}$ (τ 为衰减分量的时间常数)

代入公式(1)、(2)用积分表示如下:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T A e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(n\omega_1 t)\,dt = \frac{2A}{\omega_1 T}\int_0^T e^{-\frac{\omega_1 t}{\omega_1 \tau}} \sin(n\omega_1 t)\,d(\omega_1 t) = \frac{A}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{\theta}{\omega_1\tau}} \sin(n\theta)\,d\theta =$$

$$\frac{A}{\pi}\frac{(-\omega_1\tau)\sin(n\theta) - n(\omega_1\tau)^2\cos(n\theta)}{1+(n\omega_1\tau)^2} e^{-\frac{\theta}{\omega_1\tau}}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{A}{\pi}\frac{n\left(1-e^{-\frac{2\pi}{\omega_1\tau}}\right)}{\left(\frac{1}{\omega_1\tau}\right)^2 + n^2} \tag{3}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T A e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(n\omega_1 t)\,dt = \frac{2A}{\omega_1 T}\int_0^T A e^{-\frac{\omega_1 t}{\omega_1 \tau}} \cos(n\omega_1 t)\,d(\omega_1 t) = \frac{A}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{\theta}{\omega_1\tau}} \cos(n\theta)\,d\theta =$$

$$\frac{A}{\pi}\frac{(-\omega_1\tau)\cos(n\theta) - n(\omega_1\tau)^2\sin(n\theta)}{1+(n\omega_1\tau)^2} e^{-\frac{\theta}{\omega_1\tau}}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{A}{\pi}\frac{1}{\omega_1\tau}\frac{\left(1-e^{-\frac{2\pi}{\omega_1\tau}}\right)}{\left(\frac{1}{\omega_1\tau}\right)^2 + n^2} = \frac{1}{n\omega_1\tau}a_n \tag{4}$$

从公式(3)、(4)可看出幅值衰减的直流分量对 n 次谐波正弦项、余弦项振幅都有输出[1]。这是由于对衰减的直流分量截取一个数据窗的宽度作为输入信号,对它进行频谱分析必然得到一个连续的包含各次谐波分量的频谱。因而傅氏算法不能滤掉幅值衰减的直流分量。当输入信号含有幅值衰减的直流分量时计

1997—11—28 收稿

算 n 次谐波的正、余弦振幅必带来误差。受其影响的因素为衰减直流分量的幅值 A 和时间常数 τ 的大小。

从公式(3)、(4)还可看出 n 次谐波的余弦项振幅 b_n 受其影响的程度比正弦项 a_n 小。为正弦项振幅的 $\frac{1}{n\omega_1\tau}$。通常 $\frac{1}{n\omega_1\tau}<1$。

对于基波

$$b_1=\frac{1}{\omega_1\tau}a_1 \qquad (5)$$

对于二次谐波

$$b_2=\frac{1}{2\omega_1\tau}a_2 \qquad (6)$$

可见谐波次数越高余弦项受其衰减直流分量的影响就越小。

1.2 n 次谐波余弦算法的基本原理

从前面的分析可得出一条重要结论:当时间常数满足一定的条件,衰减的直流分量对 n 次谐波的余弦项振幅影响小,对正弦项振幅影响大。能否在计算 n 次谐波正弦项振幅时不直接利用傅氏算法求解 a_n,而到用 n 次谐波的余弦项 b_n 来表示,充分利用余弦算法抑制衰减直流分量的能力强的特点来减少误差提高计算精度,这正是余弦算法的理论依据。

设输入信号为

$$X(t)=Ae^{-\frac{t}{\tau}}+\sum_{n=1}^{N}X_n\sin(\omega_n t+\phi_n)=Ae^{-\frac{t}{\tau}}+\sum_{n=1}^{N}Q_n\sin(n\omega_1 t)+b_n\cos(n\omega_1 t) \qquad (7)$$

式中 n 为自然数,$n=1,2,3,\cdots$;a_n、b_n 分别为各次谐波的正弦项和余弦项的振幅。

设 $X(t)$ 中的 n 次谐波分量为

$$X_{n1}(t)=\sqrt{2}X_n\sin(n\omega_1 t+\phi_n) \qquad (8)$$

$$X_{n1}(t)=Q_{n1}(n\omega_1 t)+b_{n1})\cos(n\omega_1 t) \qquad (9)$$

展开公式(8)

$$X_{n1}(t)=\sqrt{2}X_n[\sin(n\omega_1 t)\cos\phi_n+\cos(n\omega_1 t)\sin\phi_n] \qquad (10)$$

$$a_{n1}=\sqrt{2}X_n\cos\phi_n \qquad (11)$$

$$b_{n1}=\sqrt{2}X_n\sin\phi_n \qquad (12)$$

设 $X_{n2}(t)$ 为滞后 $X_{n1}(t)$ $n\omega_1 t_s$ 的 n 次谐波分量

$$X_{n2}(t)=\sqrt{2}X_n\sin(n\omega_1 t+n\omega_1 t_s+\phi_n) \qquad (13)$$

$$X_{n2}(t)=a_{n2}\sin(n\omega_1 t)+b_{n2}\cos(n\omega_1 t) \qquad (14)$$

式中 ω_1 为基波角频率,T_s 为采样周期,n 为谐波次数。

展开公式(13)

$$X_{n2}(t)=\sqrt{2}X_n\sin(n\omega_1 t+n\omega_1 T_s+\phi_n)=\sqrt{2}X_n[\sin(n\omega_1 t)\cos(n\omega_1 T_s+\phi_n)+\cos(n\omega_1 t)\sin(n\omega_1 T_s+\phi_n) \qquad (15)$$

$$a_{n2}=\sqrt{2}X_n\cos(n\omega_1 T_s+\phi_n) \qquad (16)$$

$$b_{n2}=\sqrt{2}X_n\sin(n\omega_1 T_s+\phi_n) \qquad (17)$$

展开(17)式可求得

$$\sqrt{2}X_n\cos\phi_n=\frac{b_{n2}-b_{n1}\cos(n\omega_1 T_s)}{\sin(n\omega_1 T_s)} \qquad (18)$$

即

$$a_{n1}=\frac{b_{n2}-b_{n1}\cos(n\omega_1 T_s)}{\sin(n\omega_1 T_s)} \qquad (19)$$

展开(16)式由(18)式经整理

$$a_{n2}=\frac{\cos(n\omega_1 T_s)b_{n2}-b_{n1}}{\sin(n\omega_1 T_s)} \qquad (20)$$

可见输入信号的各次谐波正弦项都可由余弦项来表示。

当 n 次谐波余弦振幅利用傅氏算法的矩形法近似求出时

$$b_{n1}=\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}X_{(k)}\cos\left(n\frac{2k\pi}{N}\right) \qquad (21)$$

$$b_{n2}=\frac{2}{N}\sum_{k=2}^{N+1}X_{(k)}\cos\left(n\frac{2(k-1)\pi}{N}\right) \qquad (22)$$

$X_{(k)}$ 为 $X_{(t)}$ 的第 k 点采样值。由于输入信号含有幅值衰减的直流分量 $Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ 由公式(3)、(4)可看出这一分量必对 n 次谐波的余弦振幅带来误差。也就是说由公式(21)、(22)计算出的余弦振幅不是真正的该次谐波的余弦幅值。但当由公式(21)、(22)求出的 bn_1、bn_2 代入公式(19)、(20)所求出的 an_1、an_2 由于 n 次谐波正弦项振幅完全由相邻一个采样周期的余弦振幅来表示,因而抑制衰减直流分量的能力大大增强。

n 次谐波余弦算法的幅值计算公式如下:

$$\sqrt{2}X_n=\sqrt{\left(\frac{b_{n2}-bn_1\cos(n\omega_1 T_s)}{\sin(n\omega_1 T_s)}\right)^2+b_{n1}^2} \qquad (23)$$

$$\sqrt{2}X_n=\sqrt{\left(\frac{\cos(n\omega_1 T_s)b_{n2}-b_{n1}}{\sin(n\omega_1 T_s)}\right)^2+b_{n2}^2} \qquad (24)$$

在公式(24)中由于幅值衰减的直流分量已衰减了一个采样周期的时间,因而计算精度比(23)式高。

1.2.1　基波分量的余弦算法

设采样频率 $f_s = 600\text{Hz}$, $n\omega_1 T_s = \omega_1 T_s = 30°$由公式(20)基波正弦项振幅为:

$$a_{12} = \sqrt{3} b_{12} - b_{11} \tag{25}$$

其中

$$b_{11} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{12} X(k)\cos\frac{k\pi}{6} \tag{26}$$

$$b_{12} = \frac{1}{6}\sum_{k=2}^{13} X(k)\cos\frac{(k-1)\pi}{6} \tag{27}$$

在微机保护中余弦算法可如下实现:

1)计算 b_{12}

$$b_{12} = \frac{1}{6}\{[X_{(13)} + X_{(7)}] + \frac{1}{2}[X_{(3)} - X_{(9)} - X_{(5)} + X_{(11)}] + \frac{\sqrt{3}}{2}[X_{(2)} - X_{(8)} - X_{(6)} + X_{(12)}]\} \tag{28}$$

2)计算 a_{12}

$$a_{12} = \sqrt{3} b_{12} - 2b_{11} = \frac{1}{6}\{[X_{(4)} - X_{(10)}] + \frac{1}{2}[X_{(2)} - X_{(8)} + X_{(6)} - X_{(12)}] + \frac{\sqrt{3}}{2}[X_{(3)} - X_{(9)} + X_{(5)} - X_{(11)}] + \sqrt{3}[X_{(13)} - X_{(1)}]\} \tag{29}$$

3)计算$\sqrt{2}X_1$

$$\sqrt{2}X_1 = \sqrt{b_{12}^2 + (\sqrt{3}b_{12} - 2b_{11})^2} \tag{30}$$

从公式(29)可看出余弦算法只比目前采用的傅氏算法多$\frac{\sqrt{3}}{6}[X_{(13)} - X_{(1)}]$项。

1.2.2　二次谐波的余弦算法

设 $f_s = 600\text{Hz}$,　$n\omega_1 T_s = 60°$

$$b_{21} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{12} X_{(k)}\cos(\frac{k\pi}{3}) \tag{31}$$

$$b_{22} = \frac{1}{6}\sum_{k=2}^{13} X_{(k)}\cos[\frac{(k-1)\pi}{3}] \tag{32}$$

$$\sqrt{2}X_2 = \sqrt{(\frac{b_{22} - 2b_{21}}{\sqrt{3}})^2 + b_{22}^2} \tag{33}$$

1.2.3　三次谐波的余弦算法

仍设 $f_s = 600\text{Hz}$, $n\omega_1 T_s = 90°$由公式(20)求出三次谐波正弦项振幅 a_{32}为:

$$a_{32} = -b_{31} \tag{34}$$

$$b_{31} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{12} X_{(k)}\cos\frac{k\pi}{2} \tag{35}$$

$$b_{32} = \frac{1}{6}\sum_{k=2}^{13} X_{(k)}\cos\frac{(k-1)\pi}{2} \tag{36}$$

$$\sqrt{2}X_3 = \sqrt{(-b_{31})^2 + b_{32}^2} \tag{37}$$

2　余弦算法适用条件

假设 $X_{(t)} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$,设用余弦算法求出的 n 次谐波正弦项振幅为 U_{n1},利用傅氏算法求出的 n 次谐波正弦项振幅为 a_{n1},由公式(3)、(4)、(19)可得

$$U_{n1} = \frac{b_{n2} - b_{n1}\cos(n\omega_1 T_s)}{\sin(n\omega_1 T_s)} = \frac{e^{-\frac{T_s}{\tau}} - \cos(n\omega_1 T_s)}{\sin(n\omega_1 T_s)} \cdot \frac{1}{n\omega_1 \tau} \cdot a_{n1} \tag{38}$$

其中 τ为幅值的直流分量的时间常数, T_S 为采样周期,只要 τ满足下列不等式余弦算法就比目前傅氏算法中又计算余弦又计算正弦的方法好。

$$\left|\frac{e^{-\frac{T_s}{\tau}} - \cos(n\omega_1 T_s)}{\sin(n\omega_1 T_s)} \cdot \frac{1}{n\omega_1 \tau}\right| < 1 \tag{39}$$

令$\frac{T_s}{\tau} = X$, $e^{-\frac{T_s}{\tau}} \approx 1 - X$　代入公式(39)

$$\left|\frac{1 - X - \cos(n\omega_1 T_s)}{\sin(n\omega_1 T_s)} \cdot \frac{X}{n\omega_1 T_s}\right| < 1 \tag{40}$$

等价于

$$\frac{1 - X - \cos(n\omega_1 T_s)}{\sin(n\omega_1 T_s)} \cdot \frac{X}{n\omega_1 T_s} > -1 \tag{41}$$

$$\frac{1 - X - \cos(n\omega_1 T_s)}{\sin(n\omega_1 T_s)} \cdot \frac{X}{n\omega_1 T_s} < 1 \tag{42}$$

公式(42)求不出实根,不合题意舍去。求解(41)式等价于求不等式

$$(X - X_1)(X - X_2) < 0 \tag{43}$$

其中

$$X_{1,2} = \frac{[1 - \cos(n\omega_1 T_s)] \pm \sqrt{[1 - \cos(n\omega_1 T_s)]^2 + 4n\omega_1 T_s \cdot \sin(n\omega_1 T_s)}}{2} \tag{44}$$

2.1　对于基波余弦算法的适用条件

设 $T_s = \frac{5}{3}$ms, $n = 1$ 代入公式(44)解得:

$X_1 = 0.58288$, $X_2 = -0.4489$　公式(43)的求解

$X_2 < X < X_1$,解得 $\tau > 2.859$ms　　(45)

2.2　其它谐波余弦算法的适用条件

同样设 $T_s = 5/3$ ms

1)二次谐波适用条件:

将 $n = 2$ 代入公式(44)解(43)得

$\tau > 1.35$ms　　(46)

2)三次谐波适用条件:

$\tau > 0.9$ms　　(47)

3)五次谐波适用条件:

$\tau > 0.69$ms　　(48)

从上面分析可以看出只要时间常数大于2.859ms(按公式(19)计算的 a_{n1})对于各次谐波的余弦算法抑制衰减直流分量的能力都比目前采用的傅氏算法好。

按同样的分析方法当按公式(20)计算 a_{n2} 时基波余弦算法的适用条件 $\tau > 0.0037$s。二次谐波余弦算法适用条件 $\tau > 0.0026$s,而仿真计算的结果表明对于基波只要 $\tau > 0.0031$s,二次谐波 $\tau > 0.0014$s 余弦算法就比目前采用的傅氏算法好,出现上述情况其主要在于 $e^{-\frac{T_s}{\tau}} \approx 1 - \frac{T_s}{\tau}$所造成。

3　实例

为了说明余弦算法抑制衰减的直流分量的能力强,特举出以下三个实例。仿真计算结果表中 I_{n1}、I_{n2}、I_{cd}为采用傅氏算法的仿真计算结果,I_{n1}利用输入信号的 $X_{(1)} \sim X_{(12)}$的采样值分别计算 a_{n1}、b_{n1},I_{n2}利用输入信号的 $X_{(2)} \sim X_{(13)}$的采样值分别计算 a_{n2}、b_{n2}。

$$I_{n1} = \sqrt{a_{n1}^2 + b_{n1}^2} \qquad I_{n2} = \sqrt{a_{n2}^2 + b_{n2}^2}$$

I_{cd}为一次差分后的傅氏算法输出与 I_{n1}类似。

I_{n3}、I_{n4}为余弦算法输出。I_{n3}利用公式(24)计算 n 次谐波幅值。I_{n4}为一次差分后按公式(23)计算 n 次谐波幅值。

例 1　$X_{(t)} = 20e^{-\frac{t}{\tau}}$

表 1

τ(s)	I_{n1}	I_{n2}	I_{cd}	I_{n3}	I_{n4}
0.001	3.622337	0.68417	2.93816	1.30138	1.0555
0.0012	3.697265	0.92192	2.77534	1.070106	0.80325
0.0014	3.754129	1.14154	2.61258	0.84933	0.59105
0.01	3.089974	2.6156	0.474367	1.23626	0.18978
0.02	2.189127	2.01409	0.17503	1.0618	8.489 E - 02
0.06	0.95724	0.931505	2.623 E - 02	0.52268	1.4319 E - 02

二次谐波输出如表1所示。当 $\tau > 0.0014$s,余弦算法 I_{n3}比 I_{n1}、I_{n2}都小。一次差分后的 I_{n4}输出最小。

基波输出如表2所示。

表 2

τ(s)	I_{n1}	I_{n2}	I_{cd}	I_{n3}	I_{n4}
0.003	5.74818	3.29803	4.733	3.36006	2.766826
0.0031	5.798129	3.386853	4.658229	3.26895	2.626284
0.01	5.760037	4.875768	1.70828	0.22514	6.677 E - 02
0.02	4.18975	3.85476	0.64716	0.45266	6.9919 E - 02
0.06	1.84827	1.797643	9.7818 E - 02	0.393995	2.08514 E - 02

从表2可看出一次差分后的余弦输出 I_{n4}最小。当 $\tau > 0.0031$ 余弦算法输出 I_{n3}比傅氏算法 I_{n1}、I_{n2}都小。

例 2　$X_{(t)} = \sin(\omega_1 t + \phi_1) + 0.2\sin(2\omega_1 t) + 0.2\sin(3\omega_1 t) + e^{-\frac{t}{\tau}}$　　($\tau = 0.01$s)

基波输出如表3所示。从表3可看出余弦算法输出 I_{n3}在 ϕ_1 从 0～33 变化时都比傅氏算法好。甚至比一次差分后的傅氏算法输出 I_{cd}还好。一次差分后的余弦算法输出 I_{n4}精度最高。

例 3　$X_{(t)} = \sin(\omega_1 t) + e^{-\frac{t}{\tau}} + 0.2\sin(2\omega_1 t + \phi_2) + 0.2\cos(3\omega_1 t)$　($\tau = 0.01$s)

二次谐波输出如表4所示。从表中可看出一次差分后的余弦算法精度最高。由于幅值衰减的非周期分量幅值大因而 I_{n3}的精度不如在

基波输出那样高,但由于 I_{n4} 经一次差分克服了衰减直流分量幅值的影响,再利用余弦算法克服时间常数的影响因而效果最佳。

表 3

ϕ_1 °	I_{n1}	I_{n2}	I_{cd}	I_{n3}	I_{n4}
0 °	1.253057	1.243639	0.97809	0.99404	0.99681
30 °	1.287832	1.221018	1.02226	0.9996204	0.99674
60 °	1.262002	1.148706	1.059848	1.00529	0.997547
90 °	1.179072	1.038496	1.081873	1.009538	0.9990102
120 °	1.0514	0.9123168	1.083469	1.011248	1.000738
150 °	0.902578	0.804378	1.064291	1.009975	1.002267
180 °	0.7718435	0.7564586	1.02855	1.00605	1.003189
210 °	0.7123075	0.7924513	0.984663	1.00503	1.003257
240 °	0.7571274	0.894056	0.944094	0.994806	1.002455
270 °	0.8807248	1.019994	0.9187718	0.990496	1.000994
300 °	1.029779	1.134259	0.916889	0.9887505	0.999267
330 °	1.162429	2.213196	0.9390779	0.9905	0.9977348

4　结论

从前面的理论分析和实例可看出余弦算法具有很强的抑制幅值衰减的直流分量的能力。对于基波的余弦算法,经大量的数字仿真计算表明:只要 $\tau \geq 0.01$s 计算基波幅值的误差均小于 2 %,完全可以不再用差分后的余弦算法,以缩短数据窗。对于$(n \geq 2)$的余弦算法,由于幅值衰减的非周期分量幅值大,因而采用一次差分后的余弦算法效果最好。

表 4

ϕ_2 °	I_{n1}	I_{n2}	I_{cd}	I_{n3}	I_{n4}
0 °	0.3353196	0.325072	0.1980147	0.243129	0.2093961
30 °	0.3536079	0.299081	0.2099625	0.21759	0.208839
60 °	0.348206	0.254085	0.21913	0.18611	0.2060017
90 °	0.3195036	0.194091	0.2235019	0.156169	0.2060017
120 °	0.269589	0.126453	0.2221966	0.139098	0.19667
150 °	0.202272	7.29 E - 02	0.215474	0.1445	0.1926316
180 °	0.123696	9.238 E - 02	0.20473	0.16892	0.1906128
210 °	5.19 E - 02	0.157344	0.192454	0.200743	0.1906
240 °	8.05 E - 02	0.222816	0.1819518	0.230229	0.19427
270 °	0.1601779	0.27665	0.176556	0.2515009	0.198869
300 °	0.2346509	0.313395	0.178196	0.261332	0.203715
330 °	0.29466	0.32997	0.186268	0.258416	0.20754

参考文献

1　陈德树．计算机继电保护原理与技术．水利电力出版社,1992,11
2　杨奇逊．微型机继电保护基础,水利电力出版社,1991,9
3　张传利、黄益庄、吕文哲．多功能微机电容器保护装置的研制．电力系统自动化,1996,20(10)

COSINE ALGORITHM

Guo Guangrong (Chongqing Electric Power College,400053)

Abstract　This paper presents the Cosine algorithm that can best restrain DC component for amplitude attenuation. The simulation results have proved that the algorithm has high accuracy in computing amplitude of fundamental harmonic and nth harmonic.

Keywords　Cosine algorithm　Fourier algorithm　amplitude attenuation　DC　component