讲座

卡尔曼滤波技术与应用

—向量卡尔曼滤波器（连载3）

山东工业大学　　于九祥

1　信号向量和数据向量

前面我们已经利用卡尔曼滤波器对随机标量信号进行了处理。我们要把相同的表达形式推广到定义更广的一类信号中去，并扩充到同时估计几个信号的场合。从下面的讨论可以看到，这些多维信号都可以非常方便地用向量符号来表示，并且对简单增益参数进行代换后就可以进行向量的矩阵运算。下面举例说明向量方程的格式。

假设要对q个独立的信号同时进行估计，q个信号在时刻k的状态值记作$x_1(k)$、$x_2(k)$、…、$x_q(k)$。例如第j个信号状态值由下式形成：

$$x_j(k)=\varphi_j(K)x_j(k-1)+\omega_j(k-1)\qquad(\text{其中}j=1、2、\cdots q)\tag{1}$$

每一个w_j过程都看作是一个均值为零的、与其他所有信号都独立的白噪声过程。我们把由q个信号组成的q维向量X(K)和由q个输入过程的白噪声组成的q维向量W(K)分别定义为

$$X(K)=\begin{pmatrix}x_1(K)\\x_2(K)\\\vdots\\x_q(K)\end{pmatrix}\qquad W(K)=\begin{pmatrix}w_1(K)\\w_2(K)\\\vdots\\w_q(K)\end{pmatrix}\tag{2}$$

根据定义的这些向量，像（1）式一样的q个式子可以用一阶向量方程表示为

$$X(K)=\Phi(K)X(K-1)+W(K-1)\tag{3}$$

式中X(K)、X(K－1)、W(K－1)是（q×1）列向量，Φ(k)是一个（q×q）的矩阵，在这里是一个对角线矩阵，即：

$$\Phi(K)=\begin{pmatrix}\varphi_1(K) & 0\cdots & 0\\0 & \varphi_2(K)\cdots & 0\\\vdots & & \vdots\\0 & \cdots\cdots\cdots & \varphi_q(K)\end{pmatrix}\tag{4}$$

下面再来讨论数据向量。假设在时刻K对信号向量X(K)的估计过程中，同时产生r个含有噪声的测量值。如果把这些测量采样值记为$Z_1(K)$、$Z_2(K)$、…、$Z_r(K)$，就得到如下一组数据：

$$\begin{aligned}Z_1(K)&=h_1(K)x_1(K)+v_1(K)\\Z_2(K)&=h_2(K)x_2(K)+v_2(K)\\&\vdots\end{aligned}\tag{5}$$

$$Z_r(K)=h_r(K)x_r(K)+v_r(K)$$

其中v（K）项表示加在信号上的噪声，$h_1(K)$、$h_2(K)$…、$h_r(K)$表示若干个测量器的参数，它和以前引进的h_k类似。通过定义有r个分量的向量Z（K）和v（K），这个方程组可以写成向量形式。按照前面具有q个分量的向量X（K）的定义，我们有数据向量：

$$Z(K)=H(K)X(K)+V(K) \tag{6}$$

式中Z（K）和V（K）是（r×1）列向量，X（K）是（q×1）列向量，H（K）是一个（r×q）的观测矩阵（也称转换矩阵）。若设本例中r<q，则

$$H(K)=\begin{array}{c|c} & q\longrightarrow \\ \hline r\big\downarrow & \begin{pmatrix} h_1(K) & 0 & \cdots 0 \cdots & 0 \\ 0 & h_2(K) & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & h_r(K) & 0 \end{pmatrix}\end{array} \tag{7}$$

式（6）称为量测数据的向量方程。

2 向量问题的表示

现在讨论下面的基本问题。一信号向量X（K）满足下列一阶向量动态方程：

$$X(K)=\Phi(K)X(K-1)+W(K-1) \tag{8}$$

它可以从含有噪声的测量值向量Z（K）中检出，

$$Z(K)=H(K)X(K)+V(K) \tag{9}$$

这两个向量方程都可按前面讨论的方法得到。

现在的问题是怎样构造$\hat{X}(K)$，使它成为X（K）的最优线性估计值(滤波值)，同时怎样构造$\hat{X}(K|_{K-1})$，使它成为最优的预测值。这里最优的含义是指每个信号分量的均方误差同时都属于最小值。例如在滤波运算中，下式等于最小值

$$E[x_j(K)-\hat{x}_j(K)]^2 \tag{10}$$

式中 j=1、2、…、q。

这个问题在形式上和以前处理满足一阶动态方程的单一时变信号的情况一致。在多维情况即当信号比较复杂时，可以用向量的形式重新表示，并用求矩阵极小化的方法来获得最优解。处理过程与单一信号的情况非常相似，只不过现在用向量形式来表示。由于前面已经有了一维（标量）情况的结果，所以我们可以采用标量运算和矩阵运算的等价关系把它推广到多维（向量）系统。

上面已经阐明了由单一信号到向量信号的变换能使系统参数φ_k变成系统矩阵$\phi(K)$，观测系数h_k变成观测矩阵H（K）。下面再来讨论其他有关量的变换。

从观测噪声方差到观测噪声协方差矩阵的变换关系为

$$\sigma_v^2=\sigma_{v\,1.1}^2=E[v_1^2(K)]\longrightarrow R(K)=E[V(K)V^T(K)] \tag{11}$$

根据零均值的假设E〔V（K）〕=0，则

$$E[V(K)-EV(K)][V(K)-EV(K)]^T$$

$$=E[V(K)V^T(K)]$$

例如对于两个信号的情况，我们有

$$R(K)=\begin{bmatrix} E[v_1^2(K)] & E[v_1(K)v_2(K)] \\ E[v_2(K)v_1(K)] & E[v_2^2(K)] \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sigma^2_{v1.1} & \sigma^2_{v1.2} \\ \sigma^2_{v2.1} & \sigma^2_{v2.2} \end{bmatrix}$$

对于互不相关的两个信号，

$$R(K)=\begin{bmatrix} \sigma^2_{v1.1} & 0 \\ 0 & \sigma^2_{v2.2} \end{bmatrix}$$

同理，对于系统噪声方差有如下变换关系

$$\sigma_w^2=\sigma^2_{w1.1}=E[w_1^2(K)]\longrightarrow Q(K)=E[W(K)W^T(K)] \qquad (12)$$

这里Q(K)表示系统噪声协方差矩阵。如果各个噪声过程互不相关，则对角线以外的各项均等于零。

单一信号均方误差变成误差协方差矩阵的关系为

$$p_k=p_{1.1}(K)=E[e_1^2(K)]\longrightarrow P(K)=E[e(K)e^T(K)] \qquad (13)$$

对于两个信号的例子，我们有

$$P(K)=\begin{bmatrix} E[e_1^2(K)] & E[e_1(K)e_2(K)] \\ E[e_2(K)e_1(K)] & E[e_2^2(K)] \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} P_{1.1}(K) & P_{1.2}(K) \\ P_{2.1}(K) & P_{2.2}(K) \end{bmatrix}$$

注意，式中对角线上各项是按式(10)得到的各自的均方误差。

3　向量卡尔曼滤波器

现在我们能够把标量卡尔曼滤波算法变换为相应的向量卡尔曼滤波算法，并直接写出向量和矩阵方程，现表示如下：

卡尔曼滤波估计器

$$\hat{X}(K)=\Phi(K)\hat{X}(K-1)+K(K)\times[Z(K)-H(K)\Phi(K)\hat{X}(K-1)] \qquad (14)$$

滤波器增益

$$K(K)=P^{\sim}(K)H^T(K)[H(K)P^{\sim}(K)H^T(K)+R(K)]^{-1} \qquad (15)$$

$$\text{式中}\ P^{\sim}(K)=\Phi(K)P(K-1)\Phi^T(K)+Q(K-1) \qquad (16)$$

误差协方差矩阵

$$P(K)=P^{\sim}(K)-K(K)H(K)P^{\sim}(K) \qquad (17)$$

上述这些式子构成了向量卡尔曼滤波器，它的模型可由下列状态方程和观测方程来描述：

$$X(K)=\Phi(K)X(K-1)+W(K-1) \tag{18}$$
$$Z(K)=H(K)X(K)+V(K) \tag{19}$$

这两个式子已在前面引进并进行了讨论。

递归性是卡尔曼滤波器最有意义的特点之一，特别是在用数字计算机处理数据以获得最优估计的过程中，这个特点更显得有用。一旦得到测量值就可以进行处理而不需要把任何测量数据存储起来。在处理过程中，时刻（$K-1$）到时刻K这段时间内唯一需要存储的是$\hat{X}(K-1)$。但是，如果矩阵$\Phi(K)$和$H(K)$是时变的，则算法中要求存储这些矩阵随时间变化的数值，并存储$Q(K-1)$和$R(K)$，其中$K=1、2、\cdots$。这些矩阵可分为两种类型：第一类是确定系统物理模型的矩阵（$\Phi(K)$、$H(K)$），第二类是随机过程的统计特性（$Q(K)$、$R(K)$），它们必须是已知的。

（14）式可用图1所表示的信息流程图来描述。假定在某一时刻K，$\hat{X}(K-1)$是已知的，要求根据给定的$Z(K)$来求$\hat{X}(K)$。

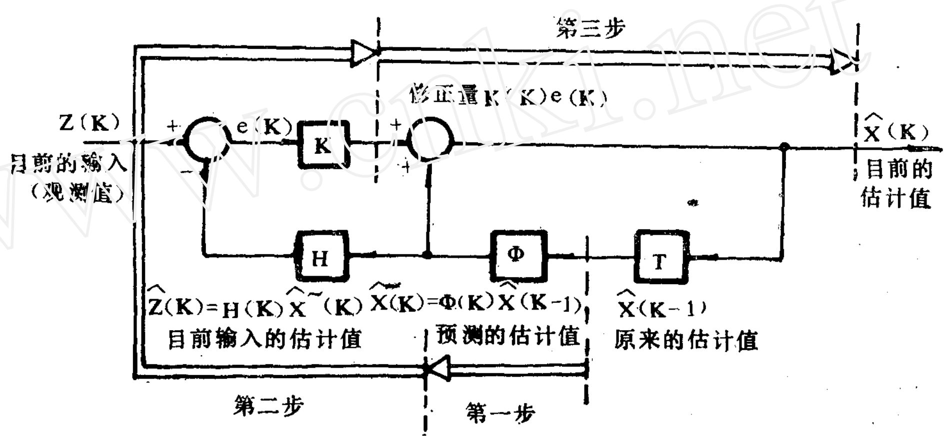

图 1

这里的计算程序如下：

a　把估计值$\hat{X}(K-1)$乘上系统的矩阵$\Phi(K)$，向前推进一步，得到预测的估计值$\hat{X}(K|_{K-1})$，并用$\hat{X}^{\sim}(K)$来表示；

b　把$\hat{X}^{\sim}(K)$乘上$H(K)$，得到量测估计值$\hat{Z}(K)$，然后和实测的数据$Z(K)$相减，得到量测的残差（或误差）$e(K)$；

c　把残差乘上矩阵$K(K)$，再和$\hat{X}^{\sim}(K)$相加，得到状态估计值$\hat{X}(K)$；

d　把$\hat{X}(K)$存储起来，用于下一步预测估计值$\hat{X}(K+1|_K)$，这时，整个上述计算程序再重复进行。

滤波器的初始化可以在一开始时置$\hat{X}(0)=0$来实现，显然此时有$\hat{X}(1)=K(1)Z(1)$于是按上述四步递推出$\hat{X}(2)$、$\hat{X}(3)$、$\cdots$、$\hat{X}(K)$，直至收敛于精确值。

这样，滤波器工作在一种“预测—修正“方式之中，即把“修正”项K（K）e（K）加到“预测的”估计值$\hat{X}^{-}$（K）上去，最后得到滤波后的估计值。在修正项中包含有卡尔曼增益矩阵K（K），它的计算可在估计前进行。在每次递推计算时，需要把这些向量的计算值存储起来，在需要的时候再调出来。

应当指出，在上图所示的最优滤波器中，包含有系统动态过程的模型，以完成预测的任务，同时残差和增益的乘积将加入这一模型作为一个反馈的修正量，也可看作是一个强制函数。

下面我们把式（14）到（17）卡尔曼滤波器的结果归纳为两个阶段，这对于计算，特别对于较好地理解卡尔曼滤波器都是十分有益的。

a　预测

$$\hat{X}(K|_{K-1}) = \Phi(K)\hat{X}(K-1) \tag{20}$$

$$P(K|_{K-1}) = \Phi(K)P(K-1)^{T}\Phi(K) + Q(K-1) \tag{21}$$

b　修正

$$\hat{X}(K|_{K}) = \hat{X}(K|K-1) + K(K) \times [Z(K) - H(K)\hat{X}(K|_{K-1})] \tag{22}$$

$$P(K|_{K}) = P(K|_{K-1}) - K(K)H(K)P(K|_{K-1}) \tag{23}$$

$$K(K) = P(K|_{K-1})H^{T}(K)[H(K)P(K|_{K-1})H^{T}(K) + R(K)]^{-1} \tag{24}$$

式中P（K｜$_{K-1}$）和P（K｜$_{K}$）分别相当于（15）～（17）式中的P^{-}（K）和P（K）。第一阶段是根据状态方程（18）进行预测，第二阶段是根据量测方程（19）式进行修正。（20）～（24）式所表示的卡尔曼滤波算法特别适合于计算，而（14）～（17）式给出的形式比较适合于原理介绍。

通常在（24）式中必须计算逆矩阵，一般说来没有什么问题。在多维系统中，量测方程（6）式的维数r应当限制较小，以避免仪器过分复杂，造价太高。常见的系统具有12到15个状态变量（向量X（K）），而只有2到3个量测变量（向量Z（K））。如果量测向量的维数r太大，在计算逆矩阵时，计算工作量将增大。（待续）

许继厂3种高技术产品通过两部鉴定

1993年元月7日，许昌继电器厂研制的3种高技术新产品在天津通过国家级鉴定委员会鉴定。

通过这次鉴定的高技术新产品是：ZKH—3A型电气化铁道馈电线成套保护装置，电气化铁道牵引变电所并联补偿电容保护装置，电气化铁道牵引变电所变压器保护装置。通过机电部、铁道部等40多名专家组成的鉴定委员会鉴定。结论：全部产品符合国家标准，满足电气化铁道安全运行的需要，达到国内同类产品的先进水平。