讲座

卡尔曼滤波技术与应用

—标量卡尔曼滤波的推导方法(连载2)

山东工业大学　于九祥

3　估计准则

我们的任务就是从观测信号Z(K)中估计出X(K)，希望估计出来的X(K)值与实际的X(K)值愈接近愈好，因此提出最优估计问题。一般都采用线性最小方差估计。线性最小方差估计问题可阐述如下：假定线性动态系统为$X(K)=\Phi(K)X(K-1)+\omega(K-1)$观测方程为$Z(K)=H(K)X(K)+V(K)$，如果从时刻1起到时刻K，我们对系统输出进行了K次量测，获得以下量测向量：

$$Z(k)=\begin{Bmatrix} Z(1) \\ Z(2) \\ \vdots \\ Z(k) \end{Bmatrix}$$

如果把这整整一段时间内所获得的量测数据存储起来，然后同时处理全部数据用来对第K时刻的状态X(K)进行估计，这种整段滤波称为维纳滤波。卡尔曼提出了在数学结构上比较简单的最优线性递推滤波方法，由递推方程随时给出新的状态估计。计算$\hat{X}(K)$时，只用到量测值中的Z(K)和前面的滤波估计值$\hat{X}(K-1)$，而不必将Z(1)……Z(K-1)以及$\hat{x}(1)$……$\hat{X}(K-2)$拿来计算，而Z(K)和$\hat{X}(K-1)$用过之后便不再使用，也就不必存储，因此卡尔曼滤波的计算量和存储量大为减少，从而能较容易地满足实时计算的要求。因而卡尔曼滤波在工程上迅速得到应用。

利用量测值Z(K)对第j时刻的状态X(j)进行估计，通常把所得到的状态估计量记作$\hat{X}(j|K)$，把估计误差记作$e(j|K)=X_j-\hat{X}(j|K)$，把估计的均方误差阵记作$p(j|K)=E[e(j|K)e^T(j|K)]$。按照j与K的不同关系，我们分别把j=K的情况称为滤波；把j>K的情况称为预报；把j<K的情况称为平滑。对我们来讲感兴趣的是滤波问题。

怎样衡量一个估计量的优劣？对于最小二乘估计大家比较熟悉，这种估计方法是以估计误差的平方和为最小作为估计的最优性判据。在推导最小二乘估计算法时，没有涉及任何统计性质。现在，让我们进一步从统计的角度来讨论估计问题。直观来看，我们总是希望估计量$\hat{X}(K)$与被估计量X(K)越接近越好，也就希望估计误差e(K)越小越好。按照统计的观点，就是说不管重复多少次量测，用同样的估计方法，按每次量测所求得的估计误差，大部份都应当密集在零附近，那才可以认为这种估计方法是好的。而估计误差e(K)的二阶原点矩$E[e(K)e^T(K)]$（又称均方误差阵），正是表示误差分布在零附近密集的程度，

如果存在某种估计，能使其均方误差阵$E[e(K)e^{T}(K)]$，比其他任何估计的均方误差阵都要小，我们就称这个估计为最小方差估计。卡尔曼滤波就是按照这种估计准则进行最优估计的。

4 标量卡尔曼滤波器的推导

我们将通过如下途径使分析具有一般意义：

4.1 我们进行处理的是随机时变信号，或称随机过程。这种信号在许多领域里常常见到，因此将首先讨论这种信号的模型；

4.2 将信号乘上因子H(K)来改变观察（数据）方程。采用这个方法后能使所得的结果推广到向量信号的场合；

4.3 推导一般形式的一阶递归滤波器的最优估计。并把结果整理成称之为标量卡尔曼滤波器的形式。这种形式非常适合直接变换为向量卡尔曼滤波器。

设要估计的随机信号满足下列动态方程：

$$x_K = \varphi_K x_{K-1} + \omega_{K-1} \tag{5}$$

动态噪声ω_K为零均值的白噪声，即：

$$E[\omega(K)] = 0$$

$$E[\omega(K)\omega(j)] = \begin{cases} 0 & K \neq j \\ \sigma_\omega^2 & K = j \end{cases}$$

再设线性观测模型为：

$$Z_K = h_K X_K + \upsilon_K \tag{6}$$

式中包含的是时变信号X_K以及表示观测参数（或测量参数）的因子h_K。以后我们将看到，因子h_K在把标量结果变换到向量信号的场合时非常有用。式中υ_K和前面的规定是一样，是一个加在信号上的独立的白噪声，它的均值为零，方差为σ_υ^2。

现在就来推导由该两个方程所描述的动态系统的卡尔曼滤波方程，即求状态估计值$\hat{X}_K$的方程。

由方程（5）知道，在t_K时刻的一个合理的预测值或理想估计值是

$$\hat{x}_K' = \varphi_K^* \hat{x}_{K-1}$$

因为状态变量处于t_{K-1}点状态时能否向t_K点状态过渡，完全视t_{K-1}点的状态如何而定。如果在t_{K-1}点，的确已经具备了过渡到t_K点的条件（状态），则它会马上转移到t_K点状态。这时我们称，状态变量发生了状态转移。状态转移是与状态变量在t_{K-1}点和t_K点的状态有关的。

根据线性估计值的定义，在t_K时刻状态估计值$\hat{x}_K$应该是Z_K和$\hat{x}_{K-1}$的线性组合，即

$$\hat{x}_K = \varphi_K^* \hat{x}_{K-1} + K_K Z_K \tag{7}$$

式中第一项表示加权的先行估计，第二项是加权的现行数据采样值。

下面我们用式（7）来求最佳估计，“最佳”的意义仍然是使均方误差最小。此时我们有φ_K^*和K_K两个参数，它们通过使均方误差最小来求得，即使

$$P_K = E[e_K^2] \tag{8}$$

最小，其中$e_K = \hat{x}_K - x_K$。

把$\hat{x}_K$表达式（7）代入式（8）得

$$P_K = E\left[\varphi_K^* \hat{x}_{K-1} K_K Z_K - x_K\right]^2 \tag{9}$$

分别对φ_K^*和K_K求导，得

$$\frac{\partial P_K}{\partial \varphi_K^*} = 2E\left[\left(\varphi_K^* \hat{x}_{K-1} + K_K Z_K - x_K\right)\hat{x}_{K-1}\right] = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial P_K}{\partial K_K} = 2E\left[\left(\varphi_K^* \hat{x}_{K-1} + K_K Z_K - x_K\right) Z_K\right] = 0 \tag{11}$$

或写为另一种形式，即：

$$E\left[e_K \hat{x}_{K-1}\right] = 0 \tag{12}$$

$$E\left[e_K Z_K\right] = 0 \tag{13}$$

从上面方程组的等一个式子中得到φ_K^*和K_K的关系，即为

$$\varphi_K^* = \varphi_K\left[1 - h_K K_K\right] \tag{14}$$

把这个关系式代入式（7）有

$$\hat{x}_K = \varphi_K \hat{x}_{K-1} + K_K\left(Z_K - \varphi_K h_K \hat{x}_{K-1}\right) \tag{15}$$

第一项$\varphi_K \hat{x}_{K-1}$表示没有其他任何附加信息加入时$\hat{x}_K$的最佳估计。因此，它是根据先行的估计值所作的预测，第二项是修正项，它的大小由新的数据采样值和观察估计（即$\hat{Z}_K = \varphi_K h_K \hat{x}_{K-1}$）二者的差以及滤波增益系数$K_K$所决定，见图3所示。

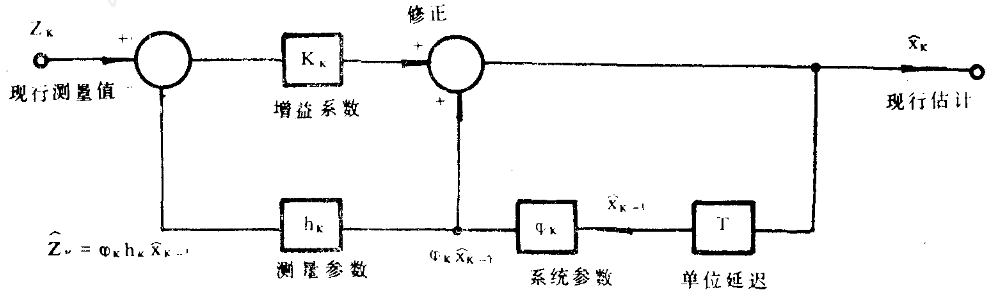

图 3　卡尔曼滤波器

根据式（8）、（7）、（12）和（13）可求得

$$K_K = \frac{h_K\left(\varphi_K^2 P_{K-1} + \sigma_\omega^2\right)}{\sigma_v^2 + h_K^2 \sigma_\omega^2 + h_K^2 \varphi_K^2 P_{K-1}} \tag{16}$$

均方误差为

$$P_K = \frac{1}{h_K}\sigma_v^2 K_K \tag{17}$$

式（15）到式（17）构成了一套完整的算法。为了使这些结果能推广到向量信号的情况，我们把这些式子重新排列成如下形式：

卡尔曼滤波器

$$\check{x}_K = \varphi_K \hat{x}_{K-1} + K_K\left(Z_K - \varphi_K h_K \hat{x}_{K-1}\right) \tag{18}$$

滤波器增益

产品介绍

SZD—1型微机故障录波测距装置

许昌继电器研究所　李瑞生

1　概述

由许昌继电器厂和中电深圳工贸公司电力技术研究所联合生产的SZD—1型微机故障录波测距装置是以INTEL—80386微机系统为核心，MCS—51单片机阵列为前置机的综合自动化装置。主要用于记录电力系统故障前后电流、电压的变化波形以及有关开关量的变位顺序及波形，为分析事故原因，确定故障性质，寻找故障点，分析继电保护装置动作的正确性提供确切的定量数据。

2　主要技术指标

2.1　输入通道：模拟量96路，电压量、电流量及高频保护讯号的配置由用户选定。开量关128路。

2.2　记录波形容量：故障前50ms，故障后4s可连续记录多次故障的全过程，如发生系统振荡，可记录不少于50s系统振荡过程的电压包络线。

2.3　波形记录方式：

1）宽行点阵打印机打印输出（配有专门的打印软件供用户脱机打印，以便挑选打印所需的波形及数据）

2）存入1.44MB软磁盘

3）经通讯接口直接送往调度所（此方式由用户选配）

2.4　输入信号量程：

$$K_k = h_k P_{\tilde{k}} (h_k^2 P_{\tilde{k}} + \sigma_v^2)^{-1} \tag{19}$$

其中

$$P_{\tilde{k}} = \varphi_k^2 P_{k-1} + \sigma_\omega^2 \tag{20}$$

均方误差

$$P_k = P_{\tilde{k}} - h_k K_k P_{\tilde{k}} \tag{21}$$

估计方程（18）与原先的方程（15）完全一样，而式（16）和（17）两个式子在引进新的量$P_{\tilde{k}}$以后可以用式（19）到（21）三个式子来表示，$P_{\tilde{k}}$这个量称为方差预测。事实上，我们应该把$P_{\tilde{k}}$写作$P(K|_{K-1})$，把P_k写作$P_k(K|_k)$。

上述一组方程配合式（5）和（6）给出的信号模型，即

$$x_k = \varphi_k \hat{x}_{k-1} + \omega_{k-1} \qquad \text{以及观测模型，即}$$

$$Z_k = h_k x_k + v_k$$

构成了标量（一维）卡尔曼滤波器。

下一章将讨论向量信号的最优估计