



微机在继电保护和控制中的应用基础(连载)

第二章 基础知识

本章介绍有关微机在继电保护和控制中应用的基础知识,由第一章可知,在微机保护和控制装置中要经过采样保持和数—模变换得到的数字量或来自隔离开关和断路器的辅助触点以及电力系统其它数字设备的数字信号,数字系统和模拟系统在概念上和处理方法上都存在着很大的差异。

首先,在数字系统中遇到的不是象在模拟系统中的时间和幅度的连续信号,而是时间离散和幅度量化后的数字序列。其次,模拟式装置是由电阻、电容、电感等元件组成,而数字式装置则由存储器、运算器、控制器及接口等部件,通过编制程序来实现。从装置的功能及特性的变化和调整来看,模拟式是靠改变元件的数值及组合,而数字式则由改变所使用的软件程序来完成,从系统特性的动态描述来看,模拟系统用微分方程和拉氏变换,数字系统则用差分方程和Z变换,它们在内容上虽有密切联系,但也有一定差别。

根据数字系统的上述特点,在本章中将对有关微机保护和控制中可能遇到的主要概念和信号处理方法进行扼要的介绍,它们对初次接触微机保护和控制的工程技术人员是必要和有益的。

§ 2—1 离散时间系统的基本概念

一、离散时间信号

与传统的模拟式保护不同,在微机保护和控制中通常是对离散时间信号进行处理,所谓离散时间信号可以理解为象计算机中所用的纯粹的数字信号或是由连续时间信号经过采样后得到的数据信号,二者所用到的基本理论是相同的。

(一) 定义

如果一个信号的值仅在离散的时刻才有定义,则称为离散时间信号,或者说,离散时间信号是在时间上不连续的一个序列,它可以是采样信号或其它数字信号,作为自变量的时刻通常是等间隔的,也可以是不等间隔。

(二) 常用的几种重要序列及其表示法

1. 单位脉冲序列,它定义为

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases} \quad (2-1)$$

这一序列与连续时间系统中的狄拉克函数的作用类似,但 $\delta(t)$ 只是数学的极限,而 $\delta(n)$ 却是一个现实的脉冲序列,其幅度为1,如图2—1(a)所示。

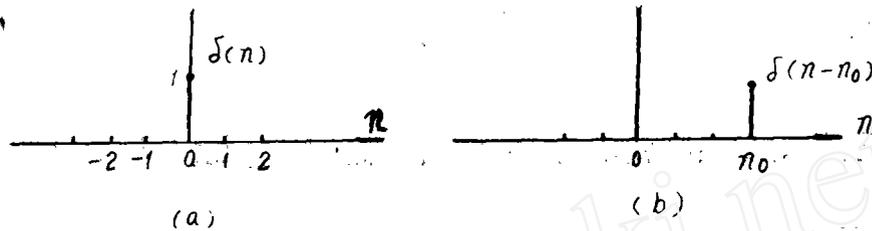


图 2—1 单位脉冲序列

$$\text{而 } \delta(n-n_0) = \begin{cases} 1, & n=n_0, \\ 0, & n \neq n_0, \end{cases} \quad (2-2)$$

式(2-2)是将单位脉冲序列延迟 n_0 ,或右移 n_0 。(图2-1(b))。

2. 单位阶跃序列,它定义为:

$$U(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (2-3)$$

单位阶跃序列如图2-2所示。

3. 指数序列,它定义为:

$$X(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (2-4)$$

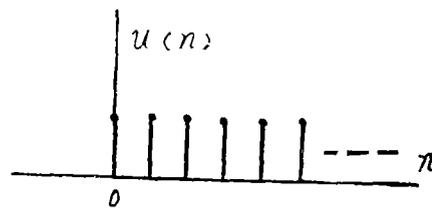


图 2—2 单位阶跃序列

指数序列的性质与 a 有关:当 $a > 1$ 时,序列发散;当 $a < 1$ 时,序列收敛;当 $a < 0$ 时,序列上下摆动,如图2-3所示

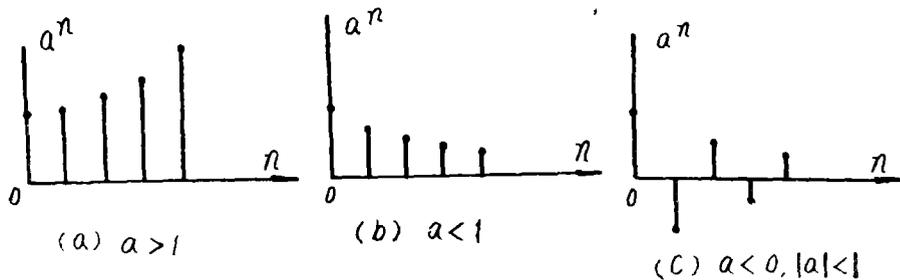


图 2—3 指数序列, (a) $a > 1$, (b) $a < 1$, (c) $a < 0$

4. 正弦序列,它定义为:

$$X(n) = \sin n\omega_0 \quad (2-5)$$

式中 ω_0 为正弦序列数字域频率,当正弦周期为 2π ,每周期取值数为 N_0 ,

则 $\omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$,例如每周期取值数为20个,

则 $\omega_0 = 0.1\pi$,序列每20个重复一次。如图2-4所示。

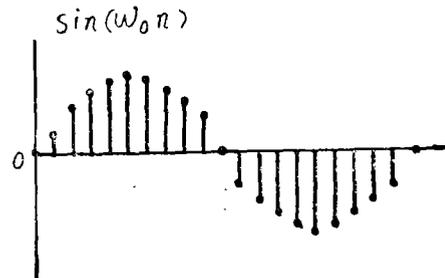


图 2—4 正弦序列

5. 任一序列的脉冲表示法

设 $\{x(m)\}$ 是一个序列值的集合, 其中任一序列 $x(n)$ 可表示为:

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \delta(n-m) \quad (2-6)$$

式(2-6)可证明如下:

$$\text{由于 } \delta(n-m) = \begin{cases} 1, & m=n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

$$\text{故 } x(m) \delta(n-m) = \begin{cases} x(n), & m=n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$$

二、离散时间系统

输入和输出都是离散信号的系统称为离散时间系统, 离散时间系统表示为:

$$y(n) = Gx(n) \quad (2-7)$$

式中 $x(n)$ 、 $y(n)$ 为输入、输出信号; G 为传递函数, 表示一定的运算或变换关系。

如果传递函数符合叠加原理, 即:

$$\text{若 } x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$$

$$\text{则 } y(n) = Gx(n) = G[ax_1(n) + bx_2(n)]$$

$$= aGx_1(n) + bGx_2(n) \quad (2-8)$$

那么即认为该系统是线性离散系统。

如果 G 的参数不随时间变化, 也就是说, 系统的输出 $y(n)$ 与输入的作用时刻无关, 则该系统称为定常系统, 我们所遇到的多属于线性定常离散系统。

三、单位脉冲响应

对一个线性定常离散时间系统输入单位脉冲序列 $\delta(n)$ 时, 其输出称为单位脉冲响应 $h(n)$, 表示为:

$$h(n) = G[\delta(n)] \quad (2-9)$$

当已知系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 后, 便可用卷积求出任意输入 $x(n)$ 时的系统输出 $y(n)$, 即:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(n-m) = x(n) * h(n) \quad (2-10)$$

上式可利用式(2-6), (2-9)和线性定常系统的性质证明如下:

$$\begin{aligned} y(n) &= G[x(n)] = G\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \delta(n-m)\right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \cdot G[\delta(n-m)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(n-m) \\ &= x(n) * h(n) \end{aligned}$$

式(2-10)说明, 在时域内利用输入信号 $x(n)$ 和单位脉冲响应进行卷积运算, 便可得到系统的输出 $y(n)$, 也就是说, 卷积的方法为离散系统的分析和信号处理

提供了一条途径。

为了说明卷积方法的应用, 请看下面算例。

例 2—1, 已知输入信号 $x(n)$ 和系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 如图 2—5 (a)、(b) 所示, 试用卷积法求系统的输出 $y(n)$ 。

解: 由式 (2—10) 于本例可得

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

令 $n = 0, 1, 2 \dots$, 便可由上式得出 $y(n)$

$$n = 0, \quad y(0) = x(0)h(0) = 2$$

$$n = 1, \quad y(1) = x(0)h(1) + x(1)h(0) = 2 \times 2 + 2 \times 1 = 6$$

$$n = 2, \quad y(2) = x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0) = 6 + 4 + 2 = 12$$

$$n = 3, \quad y(3) = x(0)h(3) + x(1)h(2) + x(2)h(1) + x(3)h(0) \\ = 8 + 6 + 4 + 2 = 20$$

$$n = 4, \quad y(4) = x(0)h(4) + x(1)h(3) + x(2)h(2) + x(3)h(1) + x(4)h(0) \\ = 0 + 8 + 6 + 4 + 0 = 18$$

$$n = 5, \quad y(5) = x(2)h(3) + x(3)h(2) \\ = 8 + 6 = 14$$

$$n = 6, \quad y(6) = x(3)h(3) \\ = 8$$

$$y(7) = y(8) = \dots = 0$$

以上所得结果如图 2—5 (c) 所示。

四、差分及差分方程

建立离散系统数学模型时经常会用到差分及差分方程的概念。微机保护的算法用差分方程表示, 并作为编制汇编语言的依据。

一个离散序列 $x(n)$ 在点 n 的差分定义为:

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n) \quad (2-11)$$

$\Delta x(n)$ 为一阶差分, 二阶差分定义为:

$$\begin{aligned} \Delta^2 x(n) &= \Delta [\Delta x(n)] = \Delta [x(n+1) - x(n)] \\ &= \Delta x(n+1) - \Delta x(n) \\ &= x(n+2) - x(n+1) - x(n+1) + x(n) \\ &= x(n+2) - 2x(n+1) + x(n) \end{aligned} \quad (2-12)$$

类似地可定义 $x(n)$ 的三阶、四阶差分等。在差分的表达式中含有若干个 $x(n+k)$ 。

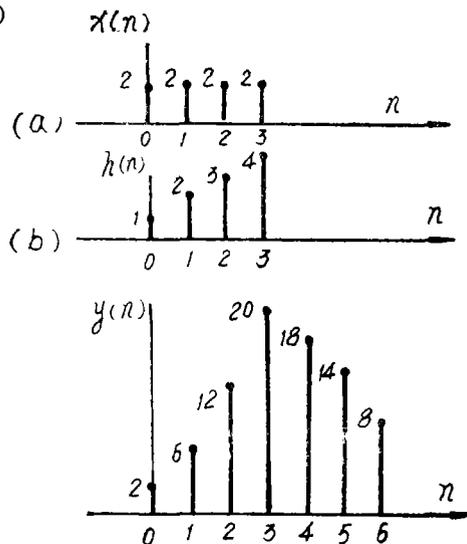


图 2—5 用卷积法求离散系统输出算例。

项, k 的最大值与最小值之差就是差分的阶。

差分方程一般表达式为:

$$F[n \cdots x(n-2), x(n-1), x(n), x(n+1) \cdots] = 0 \quad (2-13)$$

图 2-6 中高出一个简单的线性定常离散系统, 这一系统可用差分方程表示为:

$$y(n) = b_1 y(n-1) - a_0 x(n) + a_1 x(n-1) \quad (2-14)$$

图中符号 \oplus 为相加器, \rightarrow 为常数乘法器, $[Z^{-1}]$ 为单位时延, 用线性常数差分方程描述的离散系统的一般形式为:

$$y(n) = \sum_{k=0}^N a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^M b_k y(n-k) \quad (2-15)$$

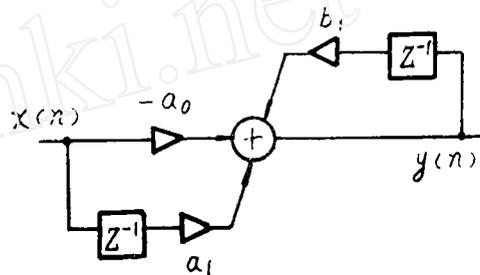


图 2-6 离散系统

由式 (2-15) 可见, 为了求解 $y(n)$ 必须知道当前的 $x(n)$, 前 N 个输入 $x(n-k)$ 和前 M 个输出 $y(n-k)$, 差分方程比微分方程简单, 容易实现, 可用逆推方法求暂态解, 现举例说明如下:

例 2-2 一个一阶差分方程表示为:

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{2} y(n-1) \quad (2-16)$$

$$\text{已知 } x(n) = \delta(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

初始条件为: $y(n) = 0, n \leq -2$

$$y(-1) = 1$$

求输出 $y(n)$ 及系统实现方法

解: 由式 (2-16) 得:

$$n=0, y(0) = x(0) + \frac{1}{2} y(-1) = 1 + \frac{1}{2} = 1.5$$

$$n=1, y(1) = x(1) + \frac{1}{2} y(0) = 0 + \frac{1}{2}$$

$$\times 1.5 = 0.75$$

$$n=2, y(2) = x(2) + \frac{1}{2} y(1) = 0 +$$

$$\frac{1}{2} \times 0.75 = 0.375$$

\vdots

依次递推可得:

$$y(n) = 1.5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \geq 0$$

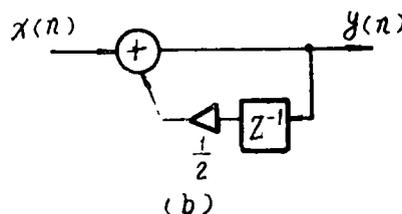
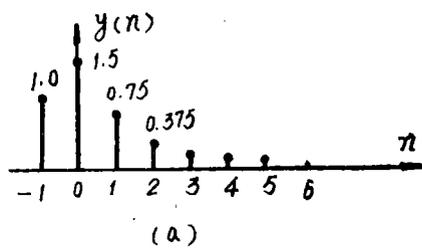


图 2-7 例 2-2 系统输出及实现

输出 $y(n)$ 如图 2-7(a) 所示, 所求系统可用图 2-7(b) 的方法实现。

§ Z-2 Z变换

我们知道，拉氏变换是分析和设计线性定常连续系统十分有用的工具，拉氏变换可使微分方程变为代数方程。对于离散系统，则采用Z变换，它可使差分方程转变为简单的代数方程，是分析研究线性离散系统的有效方法。

一、Z变换的定义

若有序列 $x(n)$ ，则幂级数

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) Z^{-n} \quad (2-17)$$

称为序列 $x(n)$ 的Z变换。其中Z为复变量。在此， $x(n)$ 的Z变换记为 $X(z)$ ，表示为：

$$Z[x(n)] = X(z) \quad (2-18)$$

式(2-17)是一个幂级数，它是Z变换的定义式，我们称这个级数的和为Z变换的闭形式。要得到这种闭形式，首先要考虑幂级数的收敛问题，也就是说，变量Z取复平面(Z平面)上哪些值时级数收敛。只有当级数式(2-17)收敛时才能称它是 $x(n)$ 的Z变换。因此，在定义Z变换时，还必须定义它的绝对收敛区。式(2-17)的绝对收敛关系式为：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) Z^{-n}| < \infty \quad (\text{且为定值}) \quad (2-19)$$

满足式(2-19)的全部Z值定义为 $X(z)$ 的绝对收敛区，下面举例说明Z变换。

例2-3，求序列 $x(n)$ 的Z变换及绝对收敛区

$$x(n) = \begin{cases} 0, & n > 0 \\ b^n, & n \leq 0 \end{cases} \quad (b \text{ 为任意实数}) \quad (2-20)$$

解 根据式(2-17)可写出

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^0 b^n Z^{-n} \\ &= 1 + b^{-1}Z + b^{-2}Z^2 + \dots + b^{-k}Z^k + \dots \end{aligned} \quad (2-21)$$

式(2-21)是无穷等比级数，为求出它的和，第一步可对其前k项求和，然后用极限运算求出它的极限。

式(2-21)的等比级数求前k项的和为：

$$S_k = \frac{1 - (b^{-1}Z)^{k+1}}{1 - b^{-1}Z} \quad (2-22)$$

求 S_k 的极限

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} S_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - (b^{-1}Z)^{k+1}}{1 - b^{-1}Z} \\ &= \frac{1}{1 - b^{-1}Z} - \frac{1}{1 - b^{-1}Z} \lim_{k \rightarrow \infty} (b^{-1}Z)^{k+1} \end{aligned} \quad (2-23)$$

只有当 $|b^{-1}Z| < 1$ ，即 $|Z| < b$ 时，或(2-23)的极限才存在，于是得到：

$$X(Z) = \frac{1}{1 - b^{-1}Z}, \quad \text{绝对收敛区为 } |Z| < b \quad (2-24)$$

例2-4 求单位脉冲序列的Z变换。

解：单位脉冲序列为：

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

由式(2-17)可得其Z变换为：

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z^{-n} = 1 \quad (2-25)$$

即单位脉冲序列 $\delta(n)$ 的Z变换为1。

例3. 求右移N位的单位脉冲序列的Z变换。

解 右移N位的单位脉冲序列的Z变换为：

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n = N \\ 0, & n \neq N \end{cases}$$

由式(2-17)可得其Z变换为：

$$X(Z) = Z^{-N} \quad (2-26)$$

例2-5, 求单位阶跃序列的Z变换。

解 由式(2-3)可得单位阶跃序列为：

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

由式(2-17)可得其Z变换为：

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) Z^{-n} = 1 + Z^{-1} + Z^{-2} + \dots$$

第一步先求到等比级数的前N项之和为：

$$F(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} Z^{-n} = \frac{1 - Z^{-N}}{1 - Z^{-1}}$$

$$\text{于是 } X(Z) = \lim_{N \rightarrow \infty} F(Z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - Z^{-N}}{1 - Z^{-1}} = \frac{1}{1 - Z^{-1}} \quad (2-27)$$

其收敛域为 $|Z| > 1$ 。

二、Z变换的一些性质

在处理许多问题时，往往需要灵活应用Z变换的以下基本性质。

(一) 线性性质

对任意常数a和b，下面的关系式成立：

$$Z[ax_1(n) + bx_2(n)] = aZ[x_1(n)] + bZ[x_2(n)] \quad (2-28)$$

即和序列的Z变换等于各分序列的Z变换之和。

(二) 位移性质

位移性质可叙述如下：

如 $Z[x(n)] = X(Z)$ ，则当 $k > 0$ 时，对

$$\left. \begin{aligned} \text{左移序列有: } Z[x(n+k)] &= Z^k [X(Z) - x(0) - x(1)Z^{-1} - \dots - x(k-1)Z^{-(k-1)}] \\ \text{右移序列有: } Z[x(n-k)] &= Z^{-k} X(Z) \end{aligned} \right\}$$

$$(2-29)$$

位移性质在解差分方程和数字滤波时颇为重要，物理概念也较清楚。凡序列右移1

位, 其Z变换应乘以 Z^{-1} , 右移k位应乘以 Z^{-k} , 而左移k位, 其Z变换乘以 Z^{-k} 后还要扣除相应k项的初始条件

(三) 卷积性质

如果 $y(n)$ 是两个序列 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的卷积, 则 $y(n)$ 的Z变换等于 $x(n)$ 及 $h(n)$ 的Z变换的乘积, 即:

$$\text{如果 } y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

$$\text{则 } Y(z) = X(z)H(z) \quad (2-30)$$

式(2-30)表明时域的卷积等于Z域的乘积。直接用卷积往往比较复杂, 故用式(2-30)先求其Z变换, 然后再反变换求 $y(n)$ 就简单得多, 其作用与模拟系统分析中所用的拉氏变换相似。

此外还有不少性质, 这里不再一一叙述了。

§ 2-3 Z反变换

Z反变换就是从给定的Z变换式 $X(Z)$ 中恢复出原序列 $x(n)$ 的过程, 也就是求离散系统在时域中的解。

Z反变换的实用方法是查变换表, 但变换表中只给出一些常用的函数。除查表外, Z反变换常用到的有以下几种方法:

(一) 部分分式展开法

部分分式展开法是最常用的一种方法, 在进行分式展开时, 要注意使展开式中的各项的形式能够与已知的变换表中的形式相对应。

设 $Y(Z)$ 是Z的有理分式, 表示成 $Y(Z) = \frac{M(Z)}{N(Z)}$, 其中分母、分子都是实系数多项式, 且无公因子, 现就一般最常遇到的情况, 即 $Y(Z)$ 的全部极点都是一阶极点, 也就是说分母多项式无重根的情况进行讨论。部分分式展开法的步骤如下:

1. 将 $Y(Z)$ 变成如下的形式:

$$Y(Z) = \frac{M(Z)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_k)} \quad (2-31)$$

式中 p_1, p_2, \dots, p_k 为 $Y(Z)$ 的极点。

2. 将式(2-31)两端除以 Z , 展开式可写成:

$$\frac{Y(Z)}{Z} = \frac{A_1}{Z-p_1} + \frac{A_2}{Z-p_2} + \cdots + \frac{A_k}{Z-p_k} \quad (2-32)$$

式中 A_1, A_2, \dots, A_k 为待求系数。

3. 用下式求系数 A_1, A_2, \dots, A_k

$$A_n = (Z-p_n) \left[\frac{Y(z)}{Z} \right]_{z=p_n} \quad (2-33)$$

4. 将由式(2-33)求得的值代入式(2-32), 再用 Z 乘两端, 经过查表(反演)得出 $y(n)$ 。

例 2—6。已知 $Y(Z) = \frac{1}{(1-Z^{-1})(1-0.5Z^{-1})}$ 用部分分式展开法求 $y(n)$ 。

解(1) 将 $Y(Z)$ 写成

$$Y(Z) = \frac{Z^2}{(Z-1)(Z-0.5)}$$

(2) 上式两侧除以 Z , 变为:

$$\frac{Y(Z)}{Z} = \frac{Z}{(Z-1)(Z-0.5)} = \frac{A_1}{Z-1} + \frac{A_2}{Z-0.5}$$

(3) 求 A_1 和 A_2 :

利用式(2-33)可得:

$$A_1 = (Z-1) \left[\frac{Y(Z)}{Z} \right]_{z=1} = \left[\frac{Z}{Z-0.5} \right]_{z=1} = 2$$

$$A_2 = (Z-0.5) \left[\frac{Y(Z)}{Z} \right]_{z=0.5} = \left[\frac{Z}{Z-1} \right]_{z=0.5} = -1$$

(4) 将 A_1 、 A_2 代入前式, 两侧乘以 Z 得:

$$Y(Z) = \frac{2Z}{Z-1} - \frac{Z}{Z-0.5}$$

(5) 查 Z 变换表有 $a^n \leftrightarrow \frac{Z}{Z-a}$, 故上式变为:

$$y(n) = 2 - 0.5^n$$

由上式可得到下表:

n	0	1	2	3∞
y(n)	1	1.5	1.75	1.875	2

(二) 直除法

如果 $Y(Z)$ 是一个有理分式, 分子, 分母都是 Z 的多项式, 则可直接用分母除分子得到 Z 的幂级数展开式, 从而得到 $y(n)$ 。当 Z 反变换式不能写成简单形式或要求将输出 $y(n)$ 表示为一序列抽样值时, 这种方法特别有用。

例 2—7 同例 2—6, 将 $Y(Z)$ 写成:

$$Y(Z) = \frac{Z^2}{Z^2 - 1.5Z + 0.5}$$

按直除法求得幂级数如下:

$$\begin{array}{r} 1 + 1.5Z^{-1} + 1.75Z^{-2} + 1.875Z^{-3} + \dots \\ Z^2 - 1.5Z + 0.5 \sqrt{Z^2} \\ \hline Z^2 - 1.5Z + 0.5 \\ \hline 1.5Z - 0.5 \end{array}$$

$$\frac{1.5Z - 2.25 + 0.75Z^{-1}}{1.75 - 0.75Z^{-1}}$$

$$\frac{1.75 - 2.625Z^{-1} + 0.875Z^{-2}}{1.875Z^{-1} - 0.875Z^{-2}}$$

该级数可写成

$$Y(z) = 1 + 1.5Z^{-1} + 1.75Z^{-2} + 1.875Z^{-3} + \dots$$

按Z变换定义式(2-17)可知

$$Y(Z) = y(0) + y(1)Z^{-1} + y(2)Z^{-2} + y(3)Z^{-3} + \dots$$

比较上述二式可得:

$$y(0) = 1, y(1) = 1.5, y(2) = 1.75, y(3) = 1.875 \dots$$

结果与上例相同。

例2-8, 已知 $y(z) = 1 + 5Z^{-1} - 3Z^{-2} + 2Z^{-4}$ 求 $y(n)$ 。

解 按Z变换定义式可得:

$$y(0) = 1, y(1) = 5, y(2) = -3, y(4) = 2, y(n) \text{ 的其它值为 } 0。$$

(三) 回线积分法

这是进行Z反变换的一个有力的分析方法, 根据复变函数理论可得:

$$y(n) = \frac{1}{2\pi j} \int_C Y(z) Z^{n-1} dz \quad (2-34)$$

上述回线积分可以留数理论为基础求出, 表示为:

$$y(n) = \sum_m \text{Res} [Y(z) Z^{n-1}]_{z=Z_m} \quad (2-35)$$

式中 Z_m 为 $Y(z) Z^{n-1}$ 的一个极点,

$R_{r,} [\cdot]_{z=Z_m}$ 为在 $Z = Z_m$ 点的留数。

根据不同极点, 求留数 $R_{r,} [\cdot]$ 的公式如下:

(1) 当 Z_m 为 $Y(z) Z^{n-1}$ 的单极点时

$$R_{r,} [Y(z) Z^{n-1}]_{z=Z_m} = \lim_{z \rightarrow Z_m} [(z - Z_m) Y(z) Z^{n-1}] \quad (2-36)$$

(2) 当 Z_m 为 $Y(z) Z^{n-1}$ 的k阶极点时:

$$R_{r,} [Y(z) Z^{n-1}]_{z=Z_m} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow Z_m} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - Z_m)^k Y(z) Z^{n-1}] \quad (2-37)$$

例2-8 利用回线积分法求:

$$Y(z) = \frac{Z^2}{(Z-1)(Z-0.5)}$$

的Z反变换

解 由于 $Y(z) Z^{n-1}$ 只有单极点, 利用式(2-35)和式(2-36)可得:

$$y(n) = \sum_m \text{Res} \left\{ \frac{Z^{n-1}}{(Z-1)(Z-0.5)} \right\}_{z=Z_m}$$

当 $n \geq 0$ 时, 上式分子式中Z为正次方, 故在 $Z = 0$ 处无极点, 其极点为 $Z = 1$ 和 $Z = 0.5$, 于是可得:

$$\text{Res} \left[\frac{Z^{n+1}}{(Z-1)(Z-0.5)} \right]_{z=1} = \left[\frac{Z^{n+1}}{Z-0.5} \right]_{z=1} = 2$$

$$\text{Res} \left[\frac{Z^{n+1}}{(Z-1)(Z-0.5)} \right]_{z=0.5} = \left[\frac{Z^{n+1}}{Z-1} \right]_{z=0.5} = -(0.5)^n$$

$$\therefore y(n) = 2 - (0.5)^n$$

所得结果与例 2-7 相同。

§ 2-4 Z 变换与拉氏变换的关系

对一个连续时间函数 $x(t)$ 进行采样, 采样信号可记为:

$$x^*(t) = p_s(t) x(t)$$

上式中 $p_s(t)$ 为一采样脉冲序列, 在理想情况下, 采样脉冲宽度趋于零, 采样脉冲序列可用冲击函数表示为:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \quad (2-38)$$

此时, $\delta_T(t)$ 是周期为 T 的一系列冲击函数, 于是有:

$$x^*(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \quad (2-39)$$

因为只有当 $t=nT$ 时, 式 (2-39) 中的 $x(t)$ 才有意义, 故又可写成:

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t-nT) \quad (2-40)$$

由式 (2-39) 可知, $x^*(t)$ 可表示为 $x(t)$ 与 $\delta_T(t)$ 的乘积, 如图 2-8 所示。

对式 (2-40) 两端取拉氏变换, 并利用其延时特性可得:

$$X^*(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-nsT} \quad (2-41)$$

将式 (2-41) 与 Z 变换的定义式 (2-17) 对比, 可以看到若以变量 Z 代换式 (2-41) 中的 e^{sT} , 就是序列 $x(nT)$ 的 Z 变换式, 于是得到 Z 变换与拉氏变换的联系为:

$$X(Z) = X^*(s) \Big|_{e^{sT} = Z} \quad (2-42)$$

变量 S 与变量 Z 之间的关系式是

$$Z = e^{sT} \quad (2-43)$$

和

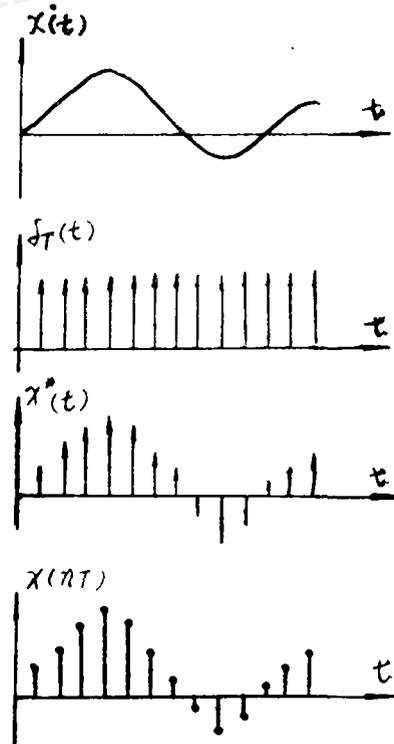


图 2-8 采样信号的形成

$$S = \frac{1}{T} \ln Z \quad (2-44)$$

式(2-43)和式(2-44)之间的转换关系如图2-9所示,不难证明,S平面的左半部分映射到Z平面的单位圆内部,S平面的右半部分映射到Z平面单位圆的外部,S平面中的 $j\omega$ 轴映射为单位圆的边界。从Z平面到S平面的转换为一多值变换,即在Z平面上的一个已知点对应于S平面上无穷多个点,这是由复数的对数特性来决定的,例如在Z平面单位圆周上的一点A在S平面的虚轴上每经 $\frac{2\pi}{T}$ 重现一次,如 A_1, A_2, A_3, \dots

S平面和Z平面的转换关系在数字信号处理中会经常用到。

§ 2-5 传递函数

图2-9 S平面与Z平面的关系

当一个线性、定常离散时间系统由单一输入 $x(n)$ 和单一输出 $y(n)$ 组成时,可用常系数的线性差分方程表示为:

$$\begin{aligned} y(n) + b_1 y(n-1) + b_2 y(n-2) + \dots + b_k y(n-k) \\ = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + \dots + a_k x(n-k) \end{aligned} \quad (2-45)$$

这是一个具有常系数的 k 阶差分方程,还可写成下述形式:

$$y(n) = \sum_{i=0}^k a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^k b_i y(n-i) \quad (2-46)$$

假定在所讨论的系统中没有起始储存能量,对式(2-45)两侧取Z变换,根据线性性质可得:

$$\begin{aligned} (1 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2} + \dots + b_k Z^{-k}) Y(Z) \\ = (a_0 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \dots + a_k Z^{-k}) X(Z) \end{aligned} \quad (2-47)$$

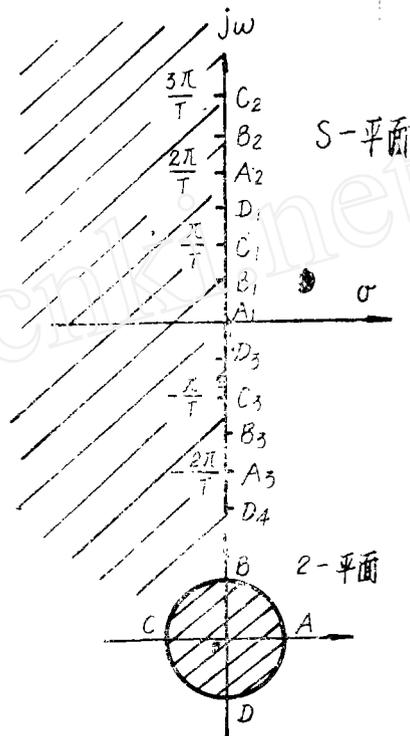
故得:

$$\begin{aligned} Y(Z) &= \frac{(a_0 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \dots + a_k Z^{-k})}{(1 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2} + \dots + b_k Z^{-k})} X(Z) \\ &= H(Z) X(Z) \end{aligned} \quad (2-48)$$

式中

$$H(Z) = \frac{a_0 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \dots + a_k Z^{-k}}{1 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2} + \dots + b_k Z^{-k}}$$

由式(2-48)定义出离散时间系统的传递函数 $H(z)$,传递函数 $H(z)$ 表示了输出



信号与输入信号的关系，但它只表示了采样时刻的关系，这种关系是离散的，是变量 Z 的函数，为了与连续时间系统相区别，我们称 $H(z)$ 为离散传递函数。

当输入信号是单位脉冲序列时，即 $X(n) = \delta(n)$ ，由式(2-25)可知其 Z 变换等于1，即 $X(Z) = 1$ ，故有 $Y(z) = H(z)X(z) = H(z)$ 。此时传递函数 $H(z)$ 便是系统的单位脉冲响应，于是单位脉冲响应 $h(n)$ 可表示为：

$$h(n) = Z^{-1}[H(z)] \quad (2-49)$$

式中符号 $Z^{-1}[\cdot]$ 表示 Z 反变换，式(2-49)说明，当一个系统的传递函数 $H(z)$ 已知后，对其进行 Z 反变换就可得出该系统在时域中的单位脉冲响应 $h(n)$ 。

§ 2-6 稳态频率响应的概念

如上所述，离散传递函数定义为系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 的 Z 变换，但单位脉冲响应的表达式不能清楚表明网络（如滤波器）的性质，因此需要更多有关频率响应的信息。对离散系统来说，最重要的，也是我们感兴趣的一种特殊情况是对正弦输入的稳态响应，稳态频率响应是系统对不同频率正弦输入的稳态响应，对于离散时间系统，输入正弦是指正弦曲线上各点的采样脉冲序列。

由式(2-10)知，系统的响应可表示为：

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

上式的 Z 变换为：

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

我们知道，由拉氏变换表达的传递函数很容易求得网络的频率响应，只要将 $S = j\omega$ 代入传递函数 $H(s)$ 中就可得到幅频特性 $|H(j\omega)|$ 和相频特性 $\varphi(j\omega)$ ，因此，我们可根据 Z 变换和拉氏变换的关系，利用 $Z = e^{sT}$ 由 Z 域变到 S 域，又在稳态条件下有 $S = j\omega$ ，代入上式可得：

$$Y(e^{j\omega T}) = X(e^{j\omega T})H(e^{j\omega T}) \quad (2-50)$$

式中 $H(e^{j\omega T})$ 是以 ω 为变量时系统对输入序列中 ω 频率的响应，也就是说，将传递函数 $H(z)$ 中，以 $Z = e^{j\omega T}$ 代入，即可求得系统的稳态频率响应。

传递函数 $H(e^{j\omega T})$ 为一复数，又可表示为：

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{Y(e^{j\omega T})}{X(e^{j\omega T})} = \frac{A_1 + jA_2}{\beta_1 + j\beta_2} = A(f) / \beta(f) \quad (2-51)$$

式中 $A(f)$ —幅度响应或幅频特性；

$\beta(f)$ —相位响应或相位特性

例 2-9 试计算一随机数据 $X(n)$ 的即时量测数据与前三次量测数据的平均值，并求这一平均处理过程的频率响应。

解 令 $y(n)$ 代替平均值，据题意可写出差分方程：

$$y(n) = \frac{1}{4} [x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)]$$

对上式取 Z 变换得到：

$$Z[y(n)] = \frac{1}{4}Z[X(n) + X(n-1) + X(n-2) + X(n-3)]$$

根据线性性质可写成:

$$Y(z) = \frac{1}{4}\{Z[X(n)] + Z[X(n-1)] + Z[X(n-2)] + Z[X(n-3)]\}$$

根据位移性质(右移)可得:

$$Y(z) = \frac{1}{4}\{X(z) + Z^{-1}X(z) + Z^{-2}X(z) + Z^{-3}X(z)\}$$

上式又可写成:

$$Y(z) = \frac{1}{4}(1 + Z^{-1} + Z^{-2} + Z^{-3})X(z)$$

故传递函数为:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{4}(1 + Z^{-1} + Z^{-2} + Z^{-3})$$

如求稳态频率响应,以 $Z = e^{j\omega T}$ 代入上式得出:

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{1}{4}(1 + e^{-j\omega T} + e^{-j2\omega T} + e^{-j3\omega T})$$

上式是一个有限项的等比级数,故:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega T}) &= \frac{1 - e^{-j4\omega T}}{4(1 - e^{-j\omega T})} = \frac{(e^{j2\omega T} - e^{-j2\omega T})e^{-j2\omega T}}{4(e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}})e^{-j\frac{\omega T}{2}}} \\ &= \frac{\sin 2\omega T}{4\sin(\frac{\omega T}{2})} \Big/ \frac{3\omega T}{2} = A(f) / \beta(f) \end{aligned} \quad (2-52)$$

于是可得出这一平均处理过程的幅频特性如图 2-10 所示。

由图 2-10 所示幅频特性可见,平均算法具有低通滤波器的性质,其幅谱特点是每隔 $\frac{1}{T} = f_s$ (采样频率)

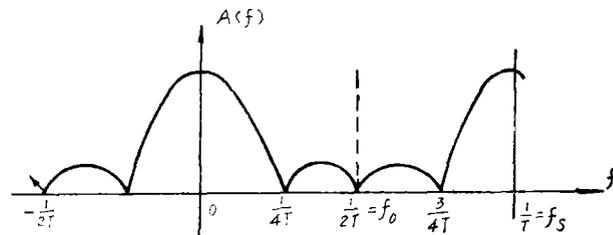


图 2-10 例 2-9 平均算法的幅频特性

重复出现一次,这种现象称为周期延拓我们将在下一节中进行说明。

§ 2-7 连续时间系统的离散化

我们所研究的系统并非是完全离散的,其中也包含有连续时间系统,例如将微机应用于电力系统继电保护时就必须将连续信号电压、电流离散化,也就是说要进行采样,本节将对采样必须遵循的原则及有关问题进行讨论。

一、采样定理

采样定理是将连续时间信号离散化时必须遵循的一条基本定理,它给出了对给定的

连续时间信号采样时所需的最低采样频率，采样定理是：“当且仅当一个连续信号的频率值低于 $\omega_s/2$ ($\omega_s = 2\pi f_s$, ω_s 为采样角频率)，则该连续信号可由它的采样信号复现”，也就是说，采样角频率 ω_s 必须大于连续信号中包含的最大角频率($\omega_{max} = 2\pi f_{max}$)的2倍，连续信号才能由它的采样信号复现，当采样频率 f_s 决定后，采样间隔，两个采样之间的时间间隔 T 也随之而定，二者的关系是 $f_s = \frac{1}{T}$ 。

对连续信号进行数字处理时，其采样频率的选定不能违背采样定理，直观地看，由图1、2可见，提高采样频率会使采样信号更逼近连续信号，但是采样频率的增加，在实时控制中还会引起其他问题。因此，还要结合具体的控制任务的要求进一步确定采样频率。

二、采样定理的说明

(一) 理想采样信号的频谱

由式(2-39)可知，理想采样信号可表示为：

$$x^*(t) = x(t) \delta_T(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \quad (2-53)$$

式中 $x(t)$ 为输入的连续信号， $\delta_T(t)$ 是理想采样脉冲序列，为了分析理想采样信号 $x^*(t)$ 的频谱，我们对式(2-53)进行付氏变换，表示为：

$$X^*(f) = F[x^*(t)] = F[x(t) \delta_T(t)] \quad (2-54)$$

由于 $\delta_T(t)$ 为周期函数，可用付氏级数表示如下：

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{jm\omega_s t} \quad (2-55)$$

式(2-55)中的 ω_s 为采样角频率， $\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T}$ (T —采样间隔)，系数 C_m 的求法如下：

$$\begin{aligned} C_m &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jm\omega_s t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) e^{-jm\omega_s t} dt \end{aligned}$$

在 $|t| \leq \frac{T}{2}$ 的积分区间内，只存在一个冲击脉冲 $\delta(t)$ ，故：

$$C_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jm\omega_s t} dt = \frac{1}{T} \quad (2-56)$$

将上式代入式(2-55)可得：

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\omega_s t} \quad (2-57)$$

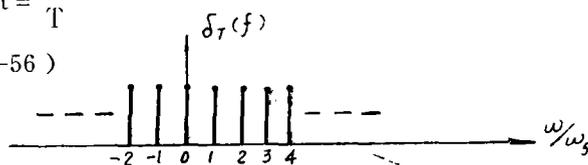


图2-11 理想采样脉冲序列的频谱

式(2-57)给出了理想采样脉冲序列的频谱，为一梳状谱，如图2-11所示。

将式(2-57)代入式(2-54)作付氏变换得：

$$\begin{aligned}
 X^*(f) &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\omega_s t} e^{-j\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{j(\omega - m\omega_s) t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - m f_s) \quad (2-58)
 \end{aligned}$$

式(2-58)表明,对连续信号 $X(t)$ 进行采样后所得到的理想采样信号 $X^*(t)$ 的频谱是频率的周期函数,其周期等于采样频率 f_s ,也就是说,如果连续信号 $X(t)$ 的频谱为 $X(f)$ (如图2-12(a)所示),则其理想采样信号 $X^*(t)$ 的频谱 $X^*(f)$ 如图2-12(b)所示。 $X^*(f)$ 的频谱每隔 f_s 重现一次,即频谱产生了周期延拓,在该图上未画出 $f < 0$ 的部分。这一结论也回答了上一节中例2-9所遗留的问题。

这种频谱周期重现的现象也可从脉冲幅度调制(PAM)的角度进行解释。在

图2-11中,采样脉冲序列 $\delta_T(t)$ 具有梳状频谱,其频率间隔为 f_s ,即它有等幅的各谐波频率成分。用采样脉冲序列 $\delta_T(t)$ 对连续信号 $X(t)$ 进行脉冲幅度调制,相当于信号 $X(t)$ 被 $\delta_T(t)$ 的各谐波一一进行幅度调制,结果 $X(t)$ 的频谱被搬到各谐波上去,而 $X^*(f)$ 是这些调制频谱的总和。

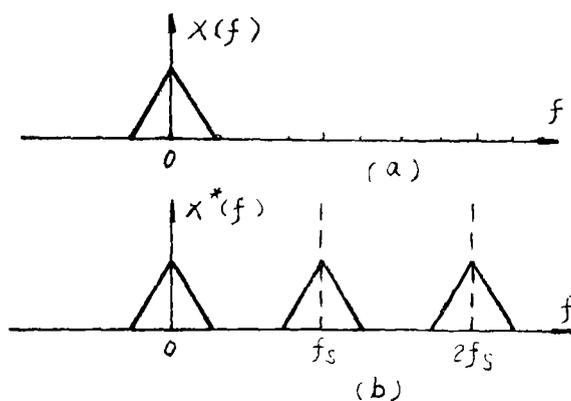


图2-12理想采样信号的频谱

(二) 折叠频率和混叠现象

折叠频率是在采样分析中常用到的概念,折叠频率 f_0 定义为:

$$f_0 = \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2T} \quad (2-59)$$

折叠频率就是当利用一个采样频率为 f_s 的离散时间系统来进行信号处理时,信号中

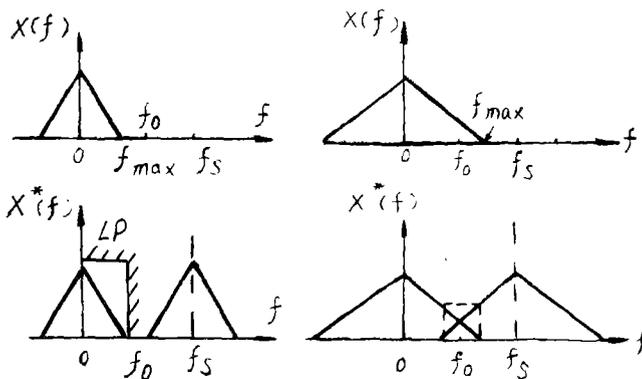


图2-13 折叠频率 f_0 与信号最高频率 f_{max} 的关系

所允许有的最高频率、任何大于折叠频率 f_0 的频率成分都将重叠起来无法恢复,并使正常信号产生混淆,为了说明这一问题,在图2-13中给出两种情况。

1. 当信号最高频率 $f_{max} < f_0$ 时,采样信号的频谱如图2-13(a)所示,此时在 $X^*(f)$ 中不会出现频率混叠现象,利用低通滤波LP很容易取出原信号 $X(t)$ 的所有频谱

成分 $X(f)$ 。

2. 当信号最高频率 $f_{max} > f_0$ 时, 采样信号的频谱如图2—13(b)所示, 在 $X^*(f)$ 中出现频率混叠(如图中虚线区所示), 此时已不能用低通恢复原信号, 在这种情况下, 如果两个被采样的正弦信号的频率之和或差是 ω_s 的整数倍, 要将这两个信号区分开来是不可能的。换句话说, 一个频率为 f_1 的信号的采样信号与频率为 $f_2 \pm f_1$ 的采样信号完全相同, 例如, 当采样频率为400Hz时, 一个350Hz的正弦信号与50Hz的信号的采样信号相同, 出现频率混淆。下面进一步举例说明这一问题。

例2—10 现对三个正弦信号 $X_1(t) = \cos 2\pi t$, $X_2(t) = -\cos 6\pi t$, $X_3(t) = \cos 10\pi t$ 进行理想采样, 采样频率为 $\omega_s = 8\pi$ 。求三个采样输出序列, 并解释频率混淆现象。

解: 理想采样脉冲序列可表示为:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

而 $T = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4}$

又理想采样信号为:

$$X^*(t) = X(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT)\delta(t - nT)$$

于是三个理想采样信号可分别写成:

$$X_1^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2} n \delta(t - \frac{n}{4})$$

$$X_2^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos \frac{3\pi}{2} n \delta(t - \frac{n}{4}) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2} n \delta(t - \frac{n}{4})$$

$$X_3^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos \frac{5\pi}{2} n \delta(t - \frac{n}{4}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2} n \delta(t - \frac{n}{4})$$

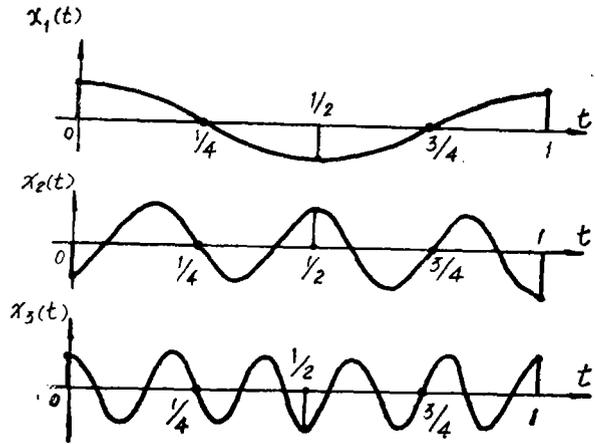


图2—14 例2—10中频率混淆说明

由此可得 $X_1^*(t) = -X_2^*(t) = X_3^*(t)$, 从时域看, 已不可能从 $X_2^*(t)$ 、 $X_3^*(t)$ 恢复出 $X_2(t)$ 、 $X_3(t)$ 。从采样定理和折叠频率看, 由于 $\omega_2 = 6\pi > \frac{\omega_s}{2} = 4\pi$ 和 $\omega_3 = 10\pi > \frac{\omega_s}{2} = 4\pi$, 采样结果必然导致频谱混淆, 恢复不出原来的信号(见图2—14)。

最后应该指出, 信号中最高频率 f_{max} 称为乃奎斯特频率, 而能够再恢复出原信号的最小采样频率 $2f_{max}$ 称为乃奎斯特采样频率。

在实际中, 为了防止出现频率混淆现象, 通常采用低通滤波器预先将输入模拟信号中的无用的高频分量滤掉, 以保证在采样后能正确识别出有用的信号。这种方法应用在微机继电保护装置中。