逻辑保护的概率计算（下）

江西南昌供电局　张旭俊

五、狄、摩根定理的扩充——互补定理

（一）狄、摩根定理的证明

狄、摩根定理有两种表达形式，即：

$$\overline{A+B+C}=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} \qquad \cdots\cdots(5.1)$$

$$\overline{ABC}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C} \qquad \cdots\cdots(5.2)$$

其实狄、摩根定理是显而易见的互补定理的特例。根据补码关系可知，若$M_1=M_2$，则必有$M_1+\overline{M}_2\equiv 1$。据此我们可以改写（5.1）式为：

$$A+B+C+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\equiv 1 \qquad \cdots\cdots(5.3)$$

（5.3）式的逻辑含义十分明显，由A、B、C三变数构成“或”逻辑$(A+B+C)$，显然它包括除了$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$“和”以外的全部可能组合，因而（$A+B+C$）与$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$互补，于是（5.3）式成立。

同理亦可证明（5.2）式的关系。

（二）互补定理

互补定理是比狄、摩根定理更为普遍的结果，下面以三变数和四变数为例进行说明，它可以推广到任意个变数。

1.三变数A、B、C的互补定理可写出如下：

$$(A+B+C)+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\equiv 1 \qquad \cdots\cdots(5.4)$$

$$(AB+BC+CA)+(\overline{A}\,\overline{B}+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{C}\,\overline{A})\equiv 1 \qquad \cdots\cdots(5.5)$$

$$A\cdot B\cdot C+(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})\equiv 1 \qquad \cdots\cdots(5.6)$$

显然（5.4）、（5.6）就是狄、摩根定理的（5.1）和（5.2）式，下面只将（5.5）式的逻辑含义说明如下：

（$AB+BC+CA$）它是从A、B、C三个变数中任取二个原码“和”的全“或”逻辑，它包括了二个或二个以上原码的总组合，即：

$$AB+BC+CA=ABC+AB\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C$$

显然剩下的组合情况是包括在任取二个反码“和”的全“或”逻辑中，即（$\overline{A}\,\overline{B}+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{C}\,\overline{A}$）中，因为后者包括一个原码及以下的总组合，即：

$$\overline{A}\,\overline{B}+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{C}\,\overline{A}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}$$

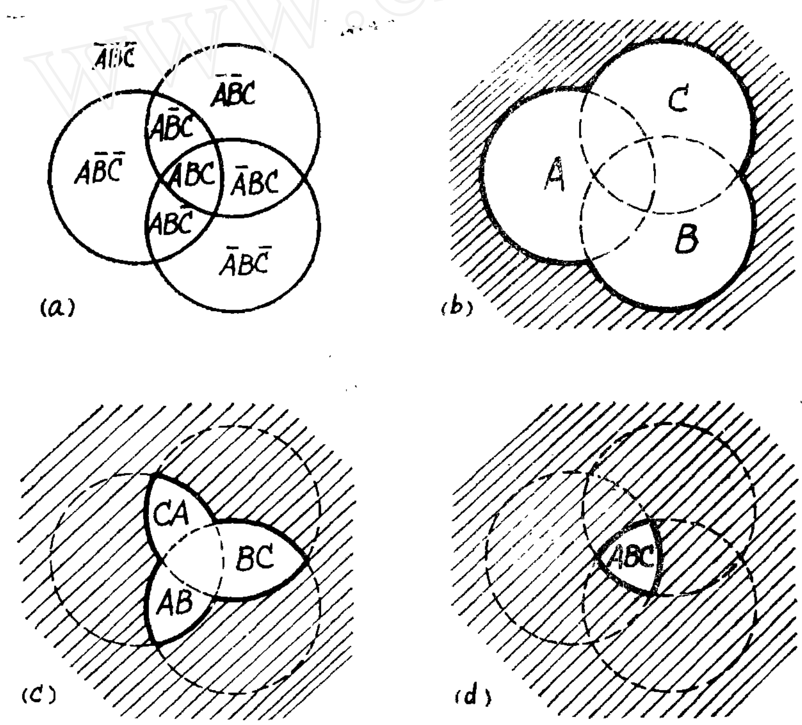
为了说明三变数互补定理的含义，将在图五中作剖析示意，叙述如下：

（1）在图五（a）中，由相应于A、B、C的三个园域，将平面交叉切割成八个区域。

（2）在图五（b）中，表示了（5.4）式的含义，其中画阴影的相当于$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$，而（$A+B+C$）相当于三个园的总"或"域。

（3）在图五（c）中，表示了（5.5）式的含义，其中画阴影的相当于（$\overline{A}\,\overline{B}+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{C}\,\overline{A}$），而（$AB+BC+CA$）相当于三个凸镜叶的总"或"域。

（4）在图五（d）中，表示了（5.6）式的含义，其中画阴影的相当于（$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$），而$ABC$相当于园弧三角形的域。



图五

2.四变数A、B、C、D的互补定理可写出为：

$$(A+B+C+D)+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\equiv 1 \qquad \cdots\cdots(5.7)$$

$$(AB+BC+CD+DA+AC+BD)+(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{A}+\overline{D}\,\overline{A}\,\overline{B})\equiv 1 \qquad \cdots\cdots(5.8)$$

$$(ABC+BCD+CDA+DAB)+(\overline{A}\,\overline{B}+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{C}\,\overline{D}+\overline{D}\,\overline{A}+\overline{A}\,\overline{C}+\overline{B}\,\overline{D})\equiv 1 \cdots\cdots(5.9)$$

$$ABCD+(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})\equiv 1 \qquad \cdots\cdots(5.10)$$

其中（5.7）、（5.10）是四变量的狄、摩根定理（5.8）、（5.9）式的逻辑含义，可仿前进行说明。

为了以下书写的方便，将引用G作全组合项的符号，例如：

$$G^{4}_{4} = ABCD$$

$$G^{4}_{3} = ABC + BCD + CDA + DAB$$

$$\vdots$$

$$G^{4}_{\bar{4}} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

$$G^{4}_{\bar{3}} = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{C}\bar{D}\bar{A} + \bar{D}\bar{A}\bar{B}$$

$$\vdots$$

如此四变数狄、摩根定理的形式可用简化符号改写如下：

$$G^{4}_{1} + G^{4}_{\bar{4}} \equiv 1 \qquad \cdots\cdots (5.7a)$$

$$G^{4}_{2} + G^{4}_{\bar{3}} \equiv 1 \qquad \cdots\cdots (5.8a)$$

$$G^{4}_{3} + G^{4}_{\bar{2}} \equiv 1 \qquad \cdots\cdots (5.9a)$$

$$G^{4}_{4} + G^{4}_{\bar{1}} \equiv 1 \qquad \cdots\cdots (5.10a)$$

3.多变数互补定理的一般形式

n个变数的互补定理可写出如下：

$$G^{n}_{i} + G^{n}_{\overline{(n-i+1)}} \equiv 1 \qquad \cdots\cdots (5.11)$$

其中i从1至n，共有n个恒等式。

（三）互补定理的应用

互补定理可用于简化误动率和拒动率公式的计算，例如设动作逻辑表式如下：

$$M = M_1M_2 + M_2M_3 + M_3M_4 + M_4M_1 + M_1M_3 + M_2M_4 \qquad \cdots\cdots (5.12)$$

如欲求出拒动率P_{Σ}，可连续演算如下：

$$M = \overline{\overline{M_1M_2 + M_2M_3 + M_3M_4 + M_4M_1 + M_1M_3 + M_2M_4}}$$

$$= \overline{\overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_2M_3} \cdot \overline{M_3M_4} \cdot \overline{M_4M_1} \cdot \overline{M_1M_3} \cdot \overline{M_2M_4}}$$

采用概率变换$M \doteqdot (1-P)$可得：

$M \doteqdot$

$$1-[1-(1-P_1)(1-P_2)][1-(1-P_2)(1-P_3)][1-(1-P_3)(1-P_4)]$$
$$[1-(1-P_4)(1-P_1)][1-(1-P_1)(1-P_3)][1-(1-P_2)(1-P_4)] \qquad \cdots\cdots (5.12a)$$

由于逻辑表式是含相关变数的（M_1、M_2、M_3、M_4各变数均出现三次），因而（5.12）式需要展开后，再应用单幂定理，才能得出最后结果。显然（5.12）式的展开太麻烦了，根据互补定理（5.8）式，可以将逻辑表式改为补码式，于是有：

$$\overline{M}=\overline{M}_1\overline{M}_2\overline{M}_3+\overline{M}_2\overline{M}_3\overline{M}_4+\overline{M}_3\overline{M}_4\overline{M}_1+\overline{M}_4\overline{M}_1\overline{M}_2$$

$$=\overline{\overline{\overline{M}_1\overline{M}_2\overline{M}_3\cdot\overline{M}_2\overline{M}_3\overline{M}_4\cdot\overline{M}_3\overline{M}_4\overline{M}_1\cdot\overline{M}_4\overline{M}_1\overline{M}_2}}$$

采用概率变换$\overline{M}\doteq P$可得：

$$\overline{M}\doteq 1-(1-P_1P_2P_3)(1-P_2P_3P_4)(1-P_3P_4P_1)(1-P_4P_1P_2)$$

$$\doteq P_1P_2P_3+P_2P_3P_4+P_3P_4P_1+P_4P_1P_2-3P_1P_2P_3P_4 \quad \cdots\cdots(5.13)$$

显然（5.13）式作单幂变化时比较简单，这是应用互补定理的好处。

至于该逻辑表式的误动率q_Σ，可直接由（5.13）式通过反照应变换$P\doteq 1-q$而得到。即：

$$1-q_\Sigma=(1-q_1)(1-q_2)(1-q_3)+(1-q_2)(1-q_3)(1-q_4)+(1-q_3)(1-q_4)(1-q_1)+(1-q_4)(1-q_1)(1-q_2)-3(1-q_1)(1-q_2)(1-q_3)(1-q_4)$$

经展开化简后可得：

$$q_\Sigma=(q_1q_2+q_2q_3+q_3q_4+q_4q_1+q_1q_3+q_2q_4)-2(q_1q_2q_3+q_2q_3q_4+q_3q_4q_1+q_4q_1q_2)+3q_1q_2q_3q_4 \quad \cdots\cdots(5.14)$$

六、各种逻辑组合方案的概率计算一览表

下面以四个变数以下的逻辑组合方案为例，写出概率计算一览表。

（一）逻辑组合方案的编码

（1）编码$\boxed{-5}$，逻辑表式为：$M=G_4^4$

即 $M=M_1M_2M_3M_4$

（2）编码$\boxed{-4}$，逻辑表式为：$M=G_3^3$

即 $M=M_1M_2M_3$

（3）编码$\boxed{-3}$，逻辑表式为：$M=G_2^2$

即 $M=M_1M_2$

（4）编码$\boxed{-2}$，逻辑表式为$M=G_3^4$

即 $M=M_1M_2M_3+M_2M_3M_4+M_3M_4M_1+M_4M_1M_2$

（5）编码$\boxed{-1}$，逻辑表式为：$M=G_2^2+G_2^2$

即 $M=M_1M_2+M_3M_4$

（6）编码$\boxed{0}$，逻辑表式为：$M=G_{2}^{3}$

即　$M=M_1M_2+M_2M_3+M_3M_1$

（7）编码$\boxed{+1}$，逻辑表式为：$M=G_{1}^{2}\cdot{}_{1}^{2}$

即　$M=(M_1+M_2)(M_3+M_4)$

（8）编码$\boxed{+2}$，逻辑表式为：$M=G_{2}^{4}$

即　$M=M_1M_2+M_2M_3+M_3M_4+M_4M_1+M_1M_3+M_2M_4$

（9）编码$\boxed{+3}$，逻辑表式为：$M=G_{1}^{2}$

即　$M=M_1+M_2$

（10）编码$\boxed{+4}$，逻辑表式为：$M=G_{1}^{3}$

即　$M=M_1+M_2+M_3$

（11）编码$\boxed{+5}$，逻辑表式为：$M=G_{1}^{4}$

即　$M=M_1+M_2+M_3+M_4$

（二）概率计算一览表

本节直接写出前述十一种编码方案的概率表式如下：

1.编码$\boxed{-5}$

$q_\Sigma=q_1q_2q_3q_4$

$$P_\Sigma=(P_1+P_2+P_3+P_4)-(P_1P_2+P_2P_3+P_3P_4+P_4P_1+P_1P_3+P_2P_4)+(P_1P_2P_3+P_2P_3P_4+P_3P_4P_1+P_4P_1P_2)-P_1P_2P_3P_4$$

2.编码$\boxed{-4}$

$q_\Sigma=q_1q_2q_3$

$P_\Sigma=(P_1+P_2+P_3)-(P_1P_2+P_2P_3+P_3P_1)+P_1P_2P_3$

3.编码$\boxed{-3}$

$q_\Sigma=q_1q_2$

$P_\Sigma=P_1+P_2-P_1P_2$

4.编码$\boxed{-2}$，含相关变数。

$q_\Sigma=q_1q_2q_3+q_2q_3q_4+q_3q_4q_1+q_4q_1q_2-3q_1q_2q_3q_4$

$$P_\Sigma=(P_1P_2+P_2P_3+P_3P_4+P_4P_1+P_1P_3+P_2P_4)-2(P_1P_2P_3+P_2P_3P_4+P_3P_4P_1+P_4P_1P_2)+3P_1P_2P_3P_4$$

5.编码$\boxed{-1}$

$$q_\Sigma = q_1q_2 + q_3q_4 - q_1q_2q_3q_4$$

$$P_\Sigma = (P_2P_3 + P_4P_1 + P_1P_3 + P_2P_4) - (P_1P_2P_3 + P_2P_3P_4 + P_3P_4P_1 + P_4P_1P_2) + P_1P_2P_3P_4$$

6.编码$\boxed{0}$

$$q_\Sigma = q_1q_2 + q_2q_3 + q_3q_1 - 2q_1q_2q_3$$

$$P_\Sigma = P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_1 - 2P_1P_2P_3$$

7.编码$\boxed{+1}$

$$q_\Sigma = (q_2q_3 + q_4q_1 + q_1q_3 + q_2q_4) - (q_1q_2q_3 + q_2q_3q_4 + q_3q_4q_1 + q_4q_1q_2) + q_1q_2q_3q_4$$

$$P_\Sigma = P_1P_2 + P_3P_4 - P_1P_2P_3P_4$$

8.编码$\boxed{+2}$，含相关变数

$$q_\Sigma = (q_1q_2 + q_2q_3 + q_3q_4 + q_4q_1 + q_1q_3 + q_2q_4) - 2(q_1q_2q_3 + q_2q_3q_4 + q_3q_4q_1 + q_4q_1q_2) + 3q_1q_2q_3q_4$$

$$P_\Sigma = P_1P_2P_3 + P_2P_3P_4 + P_3P_4P_1 + P_4P_1P_2 - 3P_1P_2P_3P_4$$

9.编码$\boxed{+3}$

$$q_\Sigma = q_1 + q_2 - q_1q_2$$

$$P_\Sigma = P_1P_2$$

10.编码$\boxed{+4}$

$$q_\Sigma = (q_1 + q_2 + q_3) - (q_1q_2 + q_2q_3 + q_3q_1) + q_1q_2q_3$$

$$P_\Sigma = P_1P_2P_3$$

11.编码$\boxed{+5}$

$$q_\Sigma = (q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - (q_1q_2 + q_2q_3 + q_3q_4 + q_4q_1 + q_1q_3 + q_2q_4) + (q_1q_2q_3 + q_2q_3q_4 + q_3q_4q_1 + q_4q_1q_2) - q_1q_2q_3q_4$$

$$P_\Sigma = P_1P_2P_3P_4$$

（三）编码方案的对偶性

由上列各编码方案的误动率 q_Σ 和拒动率 P_Σ 计算结果表明，存在着编码方案$\boxed{-5}$和$\boxed{+5}$对偶，$\boxed{-4}$和$\boxed{+4}$对偶……，所谓对偶方案，是指$\boxed{+5}$的q_Σ（P_Σ）式和$\boxed{-5}$的P_Σ（q_Σ）式形式完全一致，即它们之间存在着$P \rightleftharpoons q$的对偶变换。

编码方案的对偶性，可用互补定理加以证明，下面以$\boxed{-2}$和$\boxed{+2}$对偶为例，推证如下：

编码方案$\boxed{-2}$可特别写为：

$$M_{\boxed{-2}} = G_2^4$$

根据互补定理可以改写为

$$\overline{M}_{\boxed{-2}}=G\frac{4}{2}=\overline{M}_1\overline{M}_2+\overline{M}_2\overline{M}_3+\overline{M}_3\overline{M}_4+\overline{M}_4\overline{M}_1+\overline{M}_1\overline{M}_3+\overline{M}_2\overline{M}_4\cdots\cdots(6.1)$$

而编码方案＋2已知为：

$$M_{\boxed{+2}}=G^4_2=M_1M_2+M_2M_3+M_3M_4+M_4M_1+M_1M_3+M_2M_4\cdots\cdots(6.2)$$

对比（6.1）、（6.2）可知，$\boxed{-2}$和$\boxed{+2}$对偶，写作：

$$\overline{M}_{\boxed{-2}}\doteq M_{\boxed{+2}}$$

（四）实例概率一览表

为了得出形象的概念，对11种编码方案，以三种特例，写出实例概率（误动和拒动率）计算一览表。三种特例是：

表二

实例条件 →		$q_i=P_i=\frac{1}{2}$		$q_i=P_i=\frac{1}{10}$		$q_i\longrightarrow 0$, $P_i\longrightarrow 0$	
编码方案 ↓		q_Σ	P_Σ	q_Σ	P_Σ	q_Σ	P_Σ
$\boxed{-5}$	G^4_4	$\frac{1}{16}$	$\frac{15}{16}$	0.0001	0.3439	q^4	$4P$
$\boxed{-4}$	G^3_3	$\frac{2}{16}$	$\frac{14}{16}$	0.0010	0.2710	q^3	$3P$
$\boxed{-3}$	G^2_2	$\frac{4}{16}$	$\frac{12}{16}$	0.0100	0.1900	q^2	$2P$
$\boxed{-2}$	G^4_3	$\frac{5}{16}$	$\frac{11}{16}$	0.0037	0.0523	$4q^3$	$6P^2$
$\boxed{-1}$	$G^2_2+G^3_3$	$\frac{7}{16}$	$\frac{9}{16}$	0.0199	0.0361	$2q^2$	$4P^2$
$\boxed{0}$	G^3_2	$\frac{8}{16}$	$\frac{8}{16}$	0.0280	0.0280	$3q^2$	$3P^2$
$\boxed{+1}$	$G^3_1\cdot G^2_1$	$\frac{9}{16}$	$\frac{7}{16}$	0.0361	0.0199	$4q^2$	$2P^2$
$\boxed{+2}$	G^4_2	$\frac{11}{16}$	$\frac{5}{16}$	0.0523	0.0037	$6q^2$	$4P^3$
$\boxed{+3}$	G^2_1	$\frac{12}{16}$	$\frac{4}{16}$	0.1900	0.0100	$2q$	P^2
$\boxed{+4}$	G^3_1	$\frac{14}{16}$	$\frac{2}{16}$	0.2710	0.0010	$3q$	P^3
$\boxed{+5}$	G^4_1	$\frac{15}{16}$	$\frac{1}{16}$	0.3439	0.0001	$4q$	P^4

（1）设所有的误动率q_1、$q_2\cdots q_i\cdots q_n$和拒动率P_1、$P_2\cdots P_i\cdots P_n$均为$\frac{1}{2}$，写作

$q_i=P_i=\frac{1}{2}$ 。

（2）设所有的误动率q_1、$q_2\cdots q_i\cdots q_n$和拒动率P_1、$P_2\cdots P_i\cdots P_n$均为$\frac{1}{10}$，写作

$$q_i=P_i=\frac{1}{10}.$$

（3）设所有的误动率q_1、$q_2\cdots q_i\cdots q_n$和拒动率P_1、$P_2\cdots P_i\cdots P_n$均趋向于另，写作$q_i\longrightarrow 0$，$P_i\longrightarrow 0$。

从实例概率一览表表二可看出：

1. 编码方案的次序，完全符合$q_i=P_i=\frac{1}{2}$时q_Σ的次序。由于编码方案$\boxed{0}$在上述三种特例下均有$q_\Sigma=P_\Sigma$的关系，情况比较有利，故特以它编为$\boxed{0}$。

2. 编码方案$\boxed{-5}$、$\boxed{-2}$、$\boxed{+2}$、$\boxed{+5}$是四个逻辑变数的四种全组合方案。

而编码方案$\boxed{-1}$、$\boxed{+1}$是四个逻辑变数的部分组合方案。

3. 编码方案$\boxed{-4}$、$\boxed{0}$、$\boxed{+4}$是三个逻辑变数的三种全组合方案。

4. 编码方案$\boxed{-3}$、$\boxed{+3}$是两个逻辑变数的全组合方案。

5. 在q_Σ、P_Σ坐标图上，各编码方案的排列如图六所示，它是以特例一作图的。需要特别指出的是单逻辑变数的保护方案，即$M=G_1^1$的点和编码$\boxed{0}$方案相重叠，故只当$q_i\ll\frac{1}{2}$，$P_i\ll\frac{1}{2}$时，各多重化保护方案才会体现出它的好处来，即此时在q_Σ、P_Σ坐标图上，上述十一种编码方案的（q_Σ、P_Σ）点，会向坐标原点方向移动，象征着可靠性的提高，或说误动率、拒动率下降了。

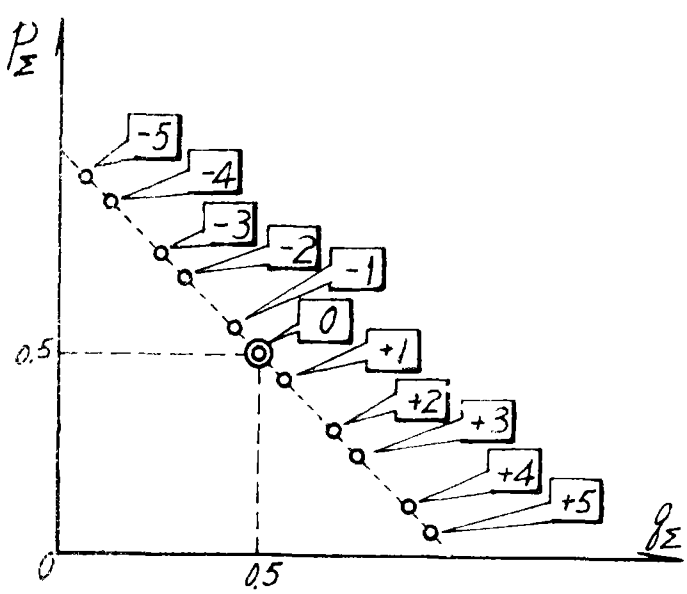


图 6

七，多重化逻辑保护的组合方案

作为概率计算的实际应用，我们对多重化逻辑保护的组合方案提出了一个建议：既然我们已按不同原理构成了几套保护装置，那末在构成保护总出口组合方案时，应当充份利用这些条件。其原则是：将误动率q_{Σ} 最小的编码方案用于 0 秒出口，而q_{Σ} 居其次的经0.02秒再出口作为前者的后备；将拒动率P_{Σ} 最小的编码方案用于发信号或启动高频发讯。下面分别以三个逻辑变数和四个逻辑变数为例说明如下：

1.三个逻辑变数的组合保护

如图七：

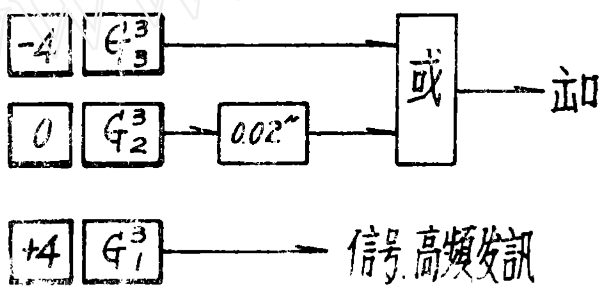


图 7

按编码方案$\boxed{-4}$构成，其误动率$q_{\Sigma}=q^3$为最小，故可直接出口去掉闸；按编码方案$\boxed{0}$构成，其误动率$q_{\Sigma}=3q^2$次之，故经0.02秒再出口作后备；按编码方案$\boxed{+4}$构成，其拒动率$P_{\Sigma}=P^3$最小，用于直接发信号或启动高频发讯。

2.四个逻辑变数的组合保护

如图八：

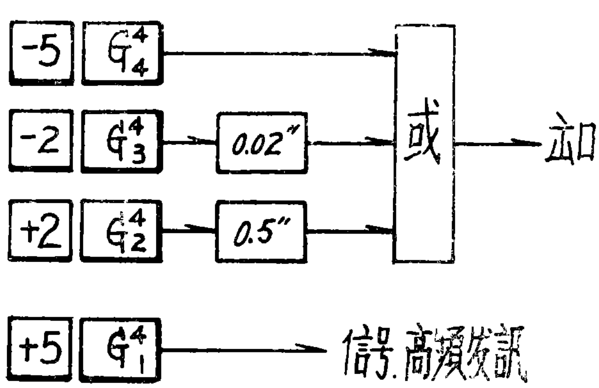


图 8

按编码方案$\boxed{-5}$构成直接出口去掉闸；按编码方案$\boxed{-2}$构成经0.02秒再出口作后备；按编码方案$\boxed{+2}$构成经0.5秒再出口第二后备；按编码方案$\boxed{+5}$构成用于直接发信号或启动高频发讯。

八，结论

通过逻辑保护概率计算一文的阐述，完成了如下四个课题：

1.本文提出了一整套关于逻辑保护概率计算的理论，（它包括：连积定理、概率变换、独立化定理、单幂定理），可以简便、正确地求得独立变数和相关变数的概率表式，用以纠正和弥补有关经典理论的错误和不足。

2.本文还对逻辑代数的理论作了发展和延伸，它包括：逻辑代数等式与普通代数恒等式的相当变换；最小化逻辑代数式的判据；狄、摩根定理的扩充——互补定理等。

3.本文还给出四个及四个以下逻辑变数的十一种编码方案的概率（误动率q_{Σ}、拒动率P_{Σ}）表式以供参考。

作为实际应用而言，编码方案$\boxed{0}$是比较好的，它只需三个逻辑变数（相当于按三种不同原理构成同一目的的三套保护装置），却能使误动率q_{Σ}与拒动率P_{Σ}同时具有二阶微量的性质。

4.本文对多重化逻辑保护组合方案提出了想象的建议，目的是为了充分利用条件，以供设计参考。